



# Décomposition modale empirique et décomposition spectrale intrinsèque : applications en traitement du signal et de l'image

Abdoulaye Thioune

## ► To cite this version:

Abdoulaye Thioune. Décomposition modale empirique et décomposition spectrale intrinsèque : applications en traitement du signal et de l'image. Traitement des images [eess.IV]. Université Paris-Est; Université Cheikh Anta Diop (Dakar), 2015. Français. NNT : 2015PESC1127 . tel-01372335

**HAL Id: tel-01372335**

**<https://theses.hal.science/tel-01372335>**

Submitted on 27 Sep 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris Est Val-de-Marne Créteil

spécialité : Sciences de l'ingénieur

option : Signal, Image et Automatique

**Abdoulaye THIOUNE**

---

## Décomposition Modale Empirique et Décomposition Spectrale Intrinsèque : Applications en traitement du signal et de l'image

---

École Doctorale Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

(ÉD MSTIC n°532)

soutenue le 19 Novembre 2015

devant le jury composé de :

Pascal LARZABAL	ENS Cachan, SATIE, Paris , FRANCE	Rapporteur
Kokou ASSOGBA	Ecole Polytechnique d'Abomey-Calavi, BENIN	Rapporteur
Latifa OUKHELLOU	Université Paris-Est Créteil, IFSTTAR, GRETIA	Examinateur
Eric DELECHELLE	Université Paris-Est Créteil, LiSSi, Paris	Examinateur
Yacine AMIRAT	Université Paris-Est Créteil, LiSSi, Paris	Directeur de thèse
Oumar NIANG	Ecole Polytechnique de Thiès, SENEGAL	Co-directeur



**Décomposition Modale Empirique  
et Décomposition Spectrale Intrinsèque:  
Applications en traitement du signal et de l'image**

Abdoulaye Thioune

18 février 2016



à tous ceux qui ont toujours été présents...

# Remerciements

Remerciements Je remercie Monsieur Pascal LARZABAL, Professeur des Universités à l'IUT de Cachan d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Je remercie Monsieur Kokou ASSOGBA, Directeur du Laboratoire d'Electronique, de Télécommunication et d'Informatique Appliquée(LETIA) de l'Université d'Abomey-Calavi, d'avoir accepté de rapporter ce travail.

Je remercie madame Latifa OUKHELLOU, Directrice de recherche à l'Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux (IFST-TAR) d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je tiens à remercier monsieur Eric DELECHELLE, d'avoir participé activement à l'encadrement de cette thèse.

Je remercie également très sincèrement monsieur Yacine AMIRAT pour avoir assuré le relais de la direction de thèse après monsieur Jacques LEMOINE qui par la suite a eu une indisponibilité. Il a fait preuve de beaucoup de disponibilité pour m'avoir permis de finaliser la thèse et d'organiser la soutenance.

Mes remerciements les plus profonds vont à l'égard de mon co-directeur de thèse monsieur Oumar NIAN, qui n'a ménagé aucun effort du début jusqu'à l'aboutissement de ce travail, pour ses conseils, son encadrement, ses encouragements, sa présence, dans les moments les plus difficiles et auprès de qui j'ai beaucoup capitalisé, aussi bien sur le plan académique que professionnel.

Je tiens aussi à remercier monsieur Jacques LEMOINE de m'avoir accueilli au LISSI et d'avoir accepté d'être mon directeur de thèse et qui malheureusement n'a pas pu terminer pour des raisons d'indisponibilité. Je le remercie pour son encadrement, sa disponibilité et son apport scientifique.

Je remercie monsieur Mamadou SANGHARE, Directeur du Laboratoire d'Algèbre, de Cryptologie, de Géométrie Algébrique et Applications du département de mathématiques et informatique de l'Université Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD).

Je remercie Monsieur Hamidou DATHE, Directeur de l'Ecole Doctorale Mathématique et Informatique pour sa disponibilité.

Je remercie monsieur Djiby SOW, Responsable du Master Recherche MAGA et de la Licence professionnelle et Recherche TDSI pour ses conseils. J'associe à ces remerciements toute l'équipe pédagogique et d'encadrement du master Transmission de Données et Sécurité de l'information.

Je tiens également à remercier madame Sylvie CACH, responsable administrative de l'École Doctorale Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication pour sa diligence.

Je tiens aussi à remercier le service de coopération et d'action culturelle de l'Ambassade de France à Dakar pour avoir financé mes premiers séjours au LISSI.

Mes remerciements vont aussi à l'ensemble des doctorants et chercheurs du LISSI Paris EST, du LTISI de l'EPT, du LACGAA et du Laboratoire d'Informatique de la FST de l'UCAD.

Mes remerciements vont à l'endroit de mon papa et ma maman que je ne saurais remercier assez, je leur dois toute ma réussite. Je tiens également à remercier ma sœur Dr. Mame Fatou THIOUNE et mes frères pour leur soutien, leur présence.

Aussi mes remerciements à Serigne Gueye THIOUNE, Mbène THIOUNE, Awa Ly THIOUNE, Babacar CAMARA ainsi que toute la famille.

Je tiens à remercier Cheikh Sadibou DIOUF, Mouhamadou SOW, Aziz NIANG, Ibrahima DIAW ainsi que toutes les personnes que je n'ai pas pu citer.

**SUJET DE THÈSE** — Décomposition Modale Empirique et Décomposition Spectrale Intrinsèque : Applications en traitement du signal et de l'image.

**RÉSUMÉ** — Dans cette thèse, il est question d'une étude sur les méthodes d'analyse temps-fréquence et temps-échelle et plus particulièrement sur la décomposition modale empirique en faisant d'abord un parcours sur les méthodes traditionnelles, de l'analyse de Fourier à la transformée en ondelettes, notamment la représentation multi-résolution. Le besoin d'une précision sur les mesures aussi bien dans l'espace temporel que dans l'espace fréquentiel a toujours été une préoccupation majeure. En fait, la transformation de Fourier ne permet pas de concilier la description fréquentielle et la localisation dans le temps. La transformée de Fourier à court terme (*TFCT*) et ses dérivées - *notamment le spectrogramme* - ont depuis longtemps été les méthodes temps-fréquence les plus utilisées dans les applications pratiques. Il faut cependant reconnaître que malgré ses nombreux aspects séduisants, ces techniques sont naturellement limitées par le fait qu'elles se sont montrées inefficaces pour l'analyse de signaux non-stationnaires.

La transformée en ondelettes a connu un grand succès ces dernières décennies avec le nombre important de ses applications en traitement du signal et de l'image. Malgré son efficacité dans la représentation et la manipulation des signaux, même non-stationnaires, une connaissance a priori sur le signal à décomposer est nécessaire pour un choix d'ondelette adéquat à chaque type de signal.

La décomposition modale empirique - *EMD pour Empirical Mode Decomposition* - est une méthode de décomposition de signaux non-stationnaires ou issus de systèmes non linéaires, en une somme de modes, chaque mode étant localisé en fréquence. Cette décomposition est associée à une transformation de Hilbert-Huang (*HHT*) dans le but d'extraire localement une fréquence instantanée et une amplitude instantanée. Elle s'apparente à la décomposition en ondelettes avec l'avantage supplémentaire que constitue son auto-adaptabilité.

Dans la suite de ces travaux, nous avons introduit une nouvelle méthode de décomposition basée sur une décomposition spectrale d'un opérateur d'interpolation basé sur les équations aux dérivées partielles. La nouvelle méthode appelée Décomposition Spectrale Intrinsèque, - *SID, pour Spectrale Intrinsic Decomposition* - est auto-adaptative et est plus générale que le principe de base de la Décomposition Modale Empirique. La méthode *SID* permet de produire un dictionnaire de Fonction Mode Spectrale Propre, en - *anglais Spectral Proper Mode Function (SPMF)* - qui sont semblables à des atomes dans les représentations parcimonieuses.

**MOTS CLÉS** — Equation aux Dérivées Partielles, Décomposition Modale Empiriques, Fonction Mode intrinsèque, Décomposition Spectrale Intrinsèque, Fonction Mode Propre Spectrale, Analyse temps-fréquence, Analyse spectrale, Décomposition - Recomposition, Débruitage.



**THESIS TOPIC** — Empirical Mode Decomposition and Spectral Intrinsic Decomposition : Applications in signal and image processing.

**ABSTRACT** — In this thesis, it is about a study on the time-frequency, time-scale analysis methods and more particularly on Empirical Mode Decomposition (*EMD*), by first a course on traditional methods from Fourier analysis to wavelets, including the multi-resolution representation. The need for precision measurements both in time space and in frequency space has always been a major preoccupation. In fact, the Fourier transformation does not reconcile the frequency description and location in time. The Short-Term Fourier Transform (*STFT*) and its derivatives - *including the spectrogram* - have long been the most used in practical applications. It must be recognized that despite its many attractive aspects, these techniques are naturally limited by the fact that they were ineffective for non-stationary signals analysis.

The wavelet transform has been very successful in recent decades with the large number of its applications in signal and image processing. Despite its effectiveness in the representation and manipulation of signals, even non-stationary, a priori knowledge about the signal to be decomposed is necessary for an appropriate wavelet choice for each type of signal.

The empirical mode decomposition (*EMD*) is a decomposition method of non-stationary or from non-linear systems signals, in an amount of modes, each mode being localized in frequency. This decomposition is associated with a Hilbert-Huang transformation (*HHT*) to locally extract instantaneous amplitude and instantaneous frequency. It is similar to the wavelet decomposition with the added benefit that constitutes its auto-adaptability.

In the remainder of this work, we introduced a new decomposition method based on a spectral decomposition of an interpolation intrinsic operator. The new method called Spectral Decomposition Intrinsic (*SID*) is auto-adaptive and is more general than the basic principle of Empirical Mode Decomposition. The *SID* method can produce a dictionary of Spectral Proper Mode Functions (*SPMF*) that are similar to atoms in sparse representations.

**KEYWORDS** — Partial Differential Equation, Empirical Mode Decomposition, Spectral Intrinsic Decomposition, Spectral Proper Mode Functions, Time-frequency analysis, Spectral Analysis, Decomposition - Recomposition, Denoising.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
1.1	Contexte des travaux . . . . .	1
1.2	Description de la problématique abordée . . . . .	2
1.3	Organisation de ce manuscrit . . . . .	3
<b>I</b>	<b>Quelques méthodes d'analyse temps-fréquence et temps-échelle</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>De l'analyse de Fourier</b>	<b>7</b>
2.1	Introduction . . . . .	7
2.2	Représentation de Fourier . . . . .	8
2.2.1	Série de Fourier, Transformée de Fourier . . . . .	8
2.2.2	Transformée de Fourier Discrète . . . . .	9
2.2.3	Transformée de Fourier Rapide . . . . .	10
2.3	Transformée de Fourier à Fenêtre . . . . .	11
2.3.1	Atomes temps-fréquence . . . . .	11
2.3.2	Transformée de Fourier à fenêtre . . . . .	14
2.3.3	Densité d'énergie ou spectrogramme . . . . .	15
2.4	Conclusion . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Transformée en ondelettes et analyse multi-résolution</b>	<b>19</b>
3.1	Introduction . . . . .	20
3.2	Décomposition en Ondelettes . . . . .	20
3.2.1	Localisation temps-fréquence . . . . .	20
3.2.2	Les Ondelettes . . . . .	20
3.2.3	Analyse Multirésolution . . . . .	21
3.2.4	Analyse Multirésolution (à fonction d'échelle) orthogonale . . . . .	22
3.3	Décomposition en ondelettes orthogonales . . . . .	24
3.4	Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales . . . . .	25
3.4.1	Décomposition . . . . .	26
3.4.2	Reconstruction . . . . .	27
3.5	Moments nuls - Régularité - Taille des supports . . . . .	27



3.5.1	Moments nuls et Régularité . . . . .	27
3.5.2	Taille du support . . . . .	27
3.6	Bases d'ondelettes biorthogonales . . . . .	28
3.7	Ondelettes en deux dimensions . . . . .	28
3.7.1	Transformation de Fourier $2D$ . . . . .	28
3.7.2	Ondelettes $2D$ . . . . .	29
3.7.3	Exemples . . . . .	29
3.7.4	Transformée en Ondelettes $2D$ directionnelle . . . . .	31
3.7.5	Analyse multi-résolution $2D$ . . . . .	32
3.8	Conclusion . . . . .	35

## II Décomposition Modale Empirique et applications en traitement du signal et de l'image 37

4	Sur La Décomposition Modale Empirique . . . . .	39
4.1	Introduction . . . . .	40
4.2	$EMD$ : Méthode originelle ou $EMD$ classique . . . . .	40
4.2.1	Quelques définitions . . . . .	40
4.2.2	Principe . . . . .	41
4.2.3	Algorithme . . . . .	42
4.2.4	Exemples . . . . .	45
4.2.5	Prise en charge des effets de bord . . . . .	50
4.2.6	Critères d'arrêt . . . . .	50
4.3	Propriétés fondamentales de l' $EMD$ . . . . .	51
4.3.1	Non-linéarité . . . . .	51
4.3.2	Pseudo-orthogonalité . . . . .	52
4.3.3	Localité . . . . .	52
4.3.4	Aspect multirésolution . . . . .	52
4.3.5	Auto-adaptativité . . . . .	53
4.4	Analyse Spectrale de Hilbert . . . . .	53
4.5	Différentes variantes de l' $EMD$ . . . . .	54
4.5.1	$EMD$ B-spline . . . . .	54
4.5.2	$EMD$ locale . . . . .	55
4.5.3	$EMD$ en ligne . . . . .	56
4.5.4	Ensemble $EMD$ . . . . .	56
4.6	Quelques extensions de l' $EMD$ . . . . .	57
4.6.1	$EMD$ pour les signaux à valeurs complexes . . . . .	57
4.6.2	$EMD$ pour les signaux à $n$ composantes . . . . .	57
4.6.3	Approche $EDP$ pour l' $EMD$ . . . . .	58
4.6.4	A propos de l'orthogonalité pour l' $EMD$ . . . . .	60
4.7	Vers l' $EMD$ sans <i>sifting</i> . . . . .	60
4.7.1	Opérateur enveloppe moyenne . . . . .	60
4.7.2	Construction de l'opérateur d'extraction directe de modes . . . . .	62
4.7.3	Convergence de l' $EMD$ sans <i>sifting</i> . . . . .	65

4.7.4	Quelques résultats	65
4.7.5	Forme analytique	70
4.7.6	Quelques exemples	70
4.8	Conclusion	72
<b>5</b>	<b>Applications de la Décomposition Modale Empirique en traitement du signal et de l'image</b>	<b>73</b>
5.1	Introduction	73
5.2	L'EMD appliqué aux images	74
5.2.1	Extension 2D de l'approche EDP pour l'EMD	74
5.2.2	Modèle de super-diffusion dans l'espace 2D	75
5.2.3	Relation avec les équations aux dérivées partielles définies sur des surfaces implicites	75
5.2.4	Quelques applications de l'approche EDP pour l'EMD 2D	76
5.3	EMD et applications	82
5.3.1	Le problème du mixage de modes	82
5.3.2	Débruitage de signaux par EMD	82
5.3.3	La compression par EMD	83
5.3.4	Le tatouage d'images : approche par EMD	85
5.3.5	L'analyse des composantes rythmiques dans les signaux EEG pour les Interfaces Cerveau-Machine (ICM) - ou Brain Computer Interface (BCI) -	87
5.4	Conclusion	92
<b>III</b>	<b>Une nouvelle méthode auto-adaptative pour la représentation du signal : la Décomposition Spectrale Intrinsèque.</b>	<b>93</b>
<b>6</b>	<b>Un nouvel interpolateur EDP : existence, résultats et applications</b>	<b>95</b>
6.1	Introduction	95
6.2	Modélisation mathématique du nouvel interpolateur EDP	96
6.3	Interprétation de l'action de la diffusivité dans le processus de diffusion	99
6.4	Résolution spectrale de l'équation aux dérivées partielles	100
6.5	Solution asymptotique de l'EDP	101
6.6	Quelques résultats de l'interpolateur EDP	101
6.7	Conclusion	107
<b>7</b>	<b>La Décomposition Spectrale Intrinsèque</b>	<b>109</b>
7.1	Introduction	109
7.2	Principe de la Décomposition Spectrale Intrinsèque	110
7.3	Présentation de l'algorithme de la Décomposition Spectrale Intrinsèque	110
7.4	Propriétés des SPMFs	111
7.4.1	Qualité d'atomes temps-fréquences	112
7.4.2	Construction d'un dictionnaire temps-fréquences	112
7.4.3	Relation entre SPMFs et fréquences locales	113

7.4.4	Interprétation de la décomposition <i>SID</i> . . . . .	113
7.5	Conclusion . . . . .	114
<b>8</b>	<b>Décomposition Spectrale Intrinsèque et applications</b>	<b>117</b>
8.1	Introduction . . . . .	117
8.2	Décomposition-reconstruction du signal . . . . .	118
8.3	Méthode itérative de débruitage par <i>SID</i> . . . . .	119
8.3.1	Théorème de Donoho - Johnstone . . . . .	121
8.3.2	Seuil de <i>Donoho</i> appliqué au débruitage par <i>SID</i> . . . . .	121
8.4	Débruitage par seuillage sur les <i>SPMFs</i> . . . . .	122
8.5	La méthode <i>SID</i> appliquée aux images . . . . .	130
8.5.1	L'algorithme <i>SID</i> version <i>2D</i> . . . . .	130
8.5.2	Extraction de structures significatives d'images par la méthode <i>SID</i> <i>2D</i> . . . . .	130
8.6	Conclusion . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Conclusion Générale et Perspectives</b>	<b>137</b>
	<b>Annexes</b>	<b>143</b>
	<b>Publications</b>	<b>143</b>
	Publications Personnelles . . . . .	145
	Sélection de Publications . . . . .	146
	Sélection de Publications . . . . .	151
	<b>Références Bibliographiques</b>	<b>163</b>

# Table des figures

2.1	On observe sur la figure, les deux pics situées aux fréquences 0.1 et 0.2. On ne peut cependant pas déduire l'ordre dans lequel apparaissent les deux sinusoïdes. . . . .	17
3.1	Exemples d'ondelettes dérivées de Gaussiennes isotropes. . . . .	30
3.2	Décomposition multi-résolution 2D . . . . .	33
3.3	Décomposition multi-résolution sur différentes bases d'ondelettes . . . . .	34
4.1	Algorithme de la décomposition par <i>EMD</i> . . . . .	44
4.2	<i>Signal – test<sub>1</sub></i> : mélange de sinusoïdes. En haut : le signal original. En bas : ses trois composantes. . . . .	45
4.3	<i>Signal – test<sub>2</sub></i> : mélange de sinusoïdes modulées <i>AM/FM</i> . En haut : le signal, représentation temporelle et dans le plan <i>temps/fréquence</i> . En bas : ses trois composantes. . . . .	46
4.4	<i>Signal – test<sub>3</sub></i> : mélange de sinusoïdes modulées avec des sauts d'amplitude et de fréquence. En haut : le signal. En bas : ses trois composantes. . . . .	47
4.5	Résultat de l' <i>EMD</i> sur le <i>signal – test<sub>1</sub></i> . Pour chaque <i>IMF</i> , on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir). . . . .	47
4.6	Résultat de l' <i>EMD</i> sur le <i>signal – test<sub>2</sub></i> . Pour chaque <i>IMF</i> , on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir). . . . .	48
4.7	Résultat de l' <i>EMD</i> sur le <i>signal – test<sub>3</sub></i> . Pour chaque <i>IMF</i> , on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir). . . . .	49
4.8	Evolution de la position des points caractéristiques durant les trois premières itérations pour obtenir le premier <i>IMF</i> . . . . .	64
4.9	<i>signal<sub>1</sub></i> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> classique en (a), <i>signal<sub>1</sub></i> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> sans <i>sifting</i> en (b), <i>signal<sub>2</sub></i> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> classique en (c), <i>signal<sub>2</sub></i> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> sans <i>sifting</i> en (d). . . . .	67

4.10	<i>signal</i> <sub>3</sub> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> classique en (a), <i>signal</i> <sub>3</sub> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> sans <i>sifting</i> en (b), <i>signal</i> <sub>4</sub> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> classique en (c), <i>signal</i> <sub>4</sub> décomposé avec la méthode <i>EMD</i> sans <i>sifting</i> en (d).	68
4.11	Tableau comparatif entre la méthode <i>EMD classique</i> et la méthode <i>EMD sans sifting</i> .	69
4.12	En haut, le premier <i>IMF</i> ; En suite les 10 premières composantes ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.	71
4.13	En haut, le premier <i>IMF</i> ; Ensuite les 100 premières composantes avec une décimation de 10 ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.	71
5.1	Décomposition adaptative directionnelle en éléments de fréquences locales par la méthode <i>EDP-EMD-2D</i> . En (a), image origine composée de plusieurs éléments de fréquence modulés. En (b) et (c), premier <i>IMF</i> et le résidu pour la décomposition suivant la direction ( <i>X</i> ). En (d) et (e), premier <i>IMF</i> et résidu pour la décomposition suivant la direction ( <i>Y</i> ). En (f) et (g), premier <i>IMF</i> et résidu pour la décomposition suivant les deux directions ( <i>X + Y</i> ). En (h) et (i), premier <i>IMF</i> et résidu pour la décomposition suivant la ligne suivie d'une décomposition suivant les colonnes ( <i>X·Y</i> ).	77
5.2	Débruitage d'images utilisant la méthode <i>EDP-EMD-2D</i> . En (a), l'image non bruitée, avec une représentation <i>2D - en haut -</i> et une représentation en surface - <i>en bas -</i> . En (b), mêmes représentations qu'en (a) avec l'image ajoutée d'un bruit Gaussien. En (c), l'image débruitée est donnée par le cinquième <i>IMF</i> .	78
5.3	Filtrage de l'image "BARBARA" par la méthode <i>EDP-EMD-2D</i> . En (a), l'image d'origine. En (b) et (c) les approximations - résidu - et les détails - première <i>IMF</i> - l'image. En (d), (e) et (f), zoom sur les images (a), (b) et (c).	79
5.4	Comparaison entre la méthode <i>EDP-EMD-2D</i> et l'approche des <i>Pyramides de Laplace</i> . En (a) l'image d'origine. En (b) et (d), le premier <i>IMF</i> et résidu de pour la méthode. En (c) et (e) premier niveau des pyramides Laplace gaussiennes. Considérant que la méthode <i>EDP-EMD-2D</i> est capable d'extraire une composante large bande <i>FM</i> , la décomposition de Laplace a échoué. Toutes les bandes de zèbre sont identifiées dans le premier <i>IMF</i> en (b), mais seules les bandes de haute fréquence sont observées en (c).	80
5.5	Inpainting sur l'image de "Lena". En (a) l'image d'origine. En (b) image dégradée. En (c) résultat après Inpainting. En (d) et (f) Zoom sur les images (a) et (c).	81
5.6	Organigramme de la compression par <i>EMD</i> [KBTCV09].	84
5.7	Schéma illustratif du tatouage numérique.	86
5.8	Schéma général de fonctionnement d'une interface cerveau ordinateur.	87
5.9	Le système international 10 – 20, image de «l'institut Immrama».	89

5.10	Les 5 premières <i>IMF</i> de la décomposition <i>EMD multivariée</i> d'un signal <i>EEG</i> récupéré à partir de 3 canaux du système 10 – 20. . . . .	89
5.11	Représentation de la densité spectrale de puissance sur un scalpe. . . . .	90
5.12	Classification d'une série d'intensions de mouvement de la main droite ou de la main gauche pour un individu donné. . . . .	91
6.1	La diffusion qui se fait dans la direction de l'enveloppe supérieure, a pour effet de supprimer le minimum local entre deux maxima consécutifs. Ici, la fonction $g$ est constante par morceaux . . . . .	98
6.2	Interpolateur <i>EDP</i> pour un signal sans extrema locaux. . . . .	102
6.3	En (a) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 4000. En (b) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 40000. En (c) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 400000. . . .	103
6.4	En (a, b, c) représentations des enveloppes à la convergence de l' <i>EDP</i> . . . .	104
6.5	Calcul des enveloppes sur la base du modèle de l'équation (6.4) avec $\theta = 0$ . En (a) : à cette étape les deux enveloppes se chevauchent par endroit. En (b) : moins de chevauchement constaté et pratiquement la solution asymptotique est atteinte. En (c) : stabilité de l'évolution aboutissant à la solution. . . . .	105
6.6	Interpolateur <i>EDP</i> pour un signal sans extrema locaux. . . . .	106
6.7	Interpolateur <i>EDP</i> pour la restauration d'image. Une image originale est altérée et restaurée avec la version 2D de l'interpolateur <i>EDP</i> . . . . .	106
7.1	Signal d'entrée en (a), des vecteurs propres en (b) et (c). Un résultat semblable est obtenu avec l'opérateur enveloppe inférieure. En (d) Les valeurs propres toutes contenues dans le segment $]0, 1]$ et supérieures à $1/17$ .115	
7.2	Les <i>SPMFs</i> 1 en (a), 10 en (b), 30 en (c) et 40 en (d) avec leurs représentations dans le plan temps-fréquence. Nous avons une bonne localisation fréquentielle des <i>SPMFs</i> , ce qui justifie de la qualité d'atomes temps-fréquence de la méthode <i>SID</i> . . . . .	116
7.3	Représentation de l'énergie de chaque <i>SPMF</i> en chaque point du signal dans un plan de type temps-fréquence. . . . .	116
8.1	Comparaison de la reconstruction par la méthode <i>SID</i> sur des signaux test 1 en (a), 2 en (b) avec des méthodes basées sur la décomposition en ondelettes.123	
8.2	Comparaison de la reconstruction par la méthode <i>SID</i> sur le signal test 3 avec des méthodes basiques basées sur la décomposition en ondelettes. . . . .	124
8.3	Comparaison de la reconstruction par la méthode <i>SID</i> sur des signaux test 1 en (a), 2 en (b),3 en (c) et 4 en (d) avec des méthodes basiques basées sur la décomposition en ondelettes. . . . .	124
8.4	Tableaux comparatifs des résultats montrant les performances de la méthode <i>SID</i> en (a) et (b), les erreurs de reconstruction des différentes méthodes en (c) et en (d) les rapports signal sur bruit. . . . .	125
8.5	Différentes échelles de représentation pour une visualisation plus claire de la comparaison des erreurs de reconstruction entre la méthode <i>SID</i> et les méthodes usuelles basées sur les ondelettes. . . . .	125

8.6	En <b>(a)</b> , de haut en bas, le signal test 1, le signal bruité et le signal débruité. En <b>(b)</b> , l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations. . . .	126
8.7	En <b>(a)</b> , de haut en bas, le signal test 2, le signal bruité et le signal débruité. En <b>(b)</b> , l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations. . . .	127
8.8	En <b>(a)</b> , de haut en bas, le signal test 3, le signal bruité et le signal débruité. En <b>(b)</b> , l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations. . . .	128
8.9	En <b>(a)</b> , de haut en bas, le signal test 4, le signal bruité et le signal débruité. En <b>(b)</b> , l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations. . . .	129
8.10	Component extraction Lena. . . . .	133
8.11	Component extraction Lion & Zebra. . . . .	133
8.12	Component extraction Bird. . . . .	134

# Liste des Algorithmes

1	: EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM . . . . .	42
2	: OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL . . . . .	55
3	: OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL EN LIGNE . . . . .	56
4	: MULTIVARIATE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM . . . . .	58
5	: SPECTRAL INTRINSIC DECOMPOSITION ALGORITHM . . . . .	111
6	: SIGNAL RECONSTRUCTION WITH SID APPROACH . . . . .	119
7	: DENOISING BY ITERATIVE SID THRESHOLDING . . . . .	120
8	: DÉBRUITAGE par SEUILLAGE des COEFFICIENT SID . . . . .	122
9	: BIDIMENSIONAL SPECTRAL INTRINSIC DECOMPOSITION ALGORITHM . . . . .	130
10	: IMAGES COMPONENTS EXTRACTION by THE SID METHOD . . . . .	132





# Notations

<i>AAR</i>	adaptive autoregressive
<i>AI</i>	Amplitude Instantanée
<i>AR</i>	adaptive
<i>AM – FM</i>	Amplitude Modulation - Frequency Modulation
<i>BCI</i>	Brain Computer Interface
<i>CSP</i>	Common Spatial Pattern
<i>ECG</i>	ElectroCardioGram
<i>EDA</i>	ElectroDermal Activity
<i>EDP</i>	Equation aux Dérivées Partielles
<i>EEG</i>	ElectroEncephaloGram
<i>EMD</i>	Empirical Mode Decomposition
<i>ERD</i>	Event Related Desynchronization
<i>ERS</i>	Event Related Synchronization
<i>FI</i>	Fréquence Instantanée
<i>HHT</i>	Hilbert Huang Transform
<i>IMF</i>	Intrinsic Mode Functions
<i>MI</i>	Motor Imagery

<i>POD</i>	Proper Orthogonal Decomposition
<i>PSD</i>	Power Spectral Density
<i>SID</i>	Spectrale Intrinsic Decomposition
<i>SP</i>	Sifting Process
<i>SPMF</i>	Spectral Proper Mode Function
<i>SVD</i>	Singular Value Decomposition
<i>SVM</i>	Support Vector Machine
<i>TFCT</i>	Transformée de Fourier à Court Terme

# Chapitre 1

## Introduction Générale

### Sommaire

1.1	Contexte des travaux	1
1.2	Description de la problématique abordée	2
1.3	Organisation de ce manuscrit	3

### 1.1 Contexte des travaux

La décomposition du signal en atomes ou composantes maitrisables en temps et en fréquence est une approche assez populaire en analyse du signal. La représentation de Fourier, les méthodes d'analyse temps-fréquence ou temps-échelles basées sur les ondelettes [Boa03] et plus récemment la décomposition modale empirique [HSLa98] sont largement utilisés à cet effet dans le traitement du signal et de l'image. L'objectif est de comprendre le contenu du signal en analysant ses composantes. Il est parfois souhaitable que ces éléments soient bien adaptés pour la séparation des données et du bruit dans une certaine échelle d'analyse. Les méthodes de représentations parcimonieuses de signaux comme l'algorithme de poursuite [CDS98], la décomposition orthogonale aux valeurs propres - *en anglais Proper Orthogonal Decomposition POD* - [BS08], la décomposition en valeurs singulières - *en anglais Singular Value Decomposition SVD* - ont fait l'objet d'une attention particulière au cours des dernières années. Un des problèmes résolus par la représentation parcimonieuse consiste à une représentation plus compacte d'un signal en terme de combinaison d'atomes temps-fréquence à partir d'un dictionnaire surcomplet. La méthode *EMD* a pour objectif de décomposer des signaux en différents modes ayant

une bonne signification physique. Cela veut dire notamment que la connaissance de ces modes permet de comprendre de manière intuitive le contenu fréquentiel du signal. Les méthodes classiques décomposent un signal sur une base de fonctions propres à la méthode, qui sont donc indépendantes du signal étudié. Ainsi, par exemple, la transformée de Fourier décompose un signal en une somme de sinusoides. La méthode des ondelettes, quant à elle, utilise pour fonctions de base les ondelettes, qui sont des fonctions localisées : la signification physique des différentes composantes est donc déjà meilleure. La méthode EMD, au contraire, a une approche adaptative : pour chaque signal étudié, une nouvelle base de fonctions est construite à partir du signal à décomposer. Ainsi ces modes décriront mieux le signal. Ces modes, appelés *IMFs* - *Intrinsic Mode Functions* -, ont pour seule caractéristique d'être de *moyenne nulle*.

## 1.2 Description de la problématique abordée

La décomposition modale empirique [HSLa98] est une méthode *auto-adaptative* qui est essentiellement algorithmique et peut décomposer un signal non linéaire en composantes modulées en amplitude et en fréquence (*AM-FM*), plus un résidu. Les points caractéristiques tels que les extrema locaux sont très utiles pour l'analyse de signaux comme le montre l'algorithme *EMD* dans 1. L'interpolation de ces points caractéristiques fournit une composante basse fréquence du signal dont l'extraction itérative est la base du *processus de tamisage* ou *sifting process* de l'*EMD*. Cette composante basse fréquence ainsi appelée enveloppe moyenne est définie dans la plupart des cas comme étant la demi-somme de l'enveloppe supérieure, issue de l'interpolation des maxima et de l'enveloppe inférieure, issue de l'interpolation des minima. Ainsi, une extraction itérative d'une enveloppe moyenne aboutira à l'obtention d'une composante haute fréquence, de moyenne nulle et dont le nombre d'extrema et le nombre de passage par zéro ne diffèrent que de un. Cette composante est appelée mode ou *IMF* - *Intrinsic Mode Function* -.

Pour pallier l'absence d'un cadre théorique solide pour l'*EMD*, une approche analytique pour le *sifting process*, basée sur les équations aux dérivées partielles (*EDP*) est proposée dans [DLN05, NTG<sup>+</sup>12a]. Un schéma particulier non itératif pour résoudre le système *EDP* pour l'estimation des enveloppes supérieure et inférieure est établi avec une définition adéquate des points caractéristiques du signal à décomposer, dans [Nia07, NTG<sup>+</sup>12a].

Dans la suite de ces travaux, nous avons utilisé tous les vecteurs propres de l'opérateur enveloppe supérieure ou inférieure afin de proposer une nouvelle méthode de représentation non linéaire du signal. La nouvelle méthode appelée Décomposition Spectrale Intrinsèque, - *SID*, pour *Spectrale Intrinsic Decomposition* - [NTDL12] est auto-adaptative

et est plus générale que le principe de base de la Décomposition Modale Empirique. La méthode *SID* permet de produire un dictionnaire de Fonction Mode Spectrale Propre - *en anglais Spectral Proper Mode Function (SPMF)* -, qui peuvent conduire à une représentation parcimonieuse fournissant des résultats bien adaptés à des applications comme le débruitage du signal [NTG<sup>+</sup>12b] avec un taux de reconstruction assez concurrentiel avec des méthodes basées sur les ondelettes.

## 1.3 Organisation de ce manuscrit

Ce manuscrit est organisé en sept principaux chapitres numérotés de **2** à **8**, répartis en trois grandes parties :

Dans la première partie, nous avons fait un bref survol des méthodes d'analyse temps fréquence en passant de l'analyse de Fourier dans le **chapitre 2** à la transformée en ondelettes comme méthode d'analyse multi-résolution dans le **chapitre 3**.

Ensuite la deuxième partie traite de la décomposition modale empirique dans ses différents aspects au **chapitre 4**, en mettant l'accent sur la méthode *EDP* et l'approche spectrale proposée dans [Nia07, NDL10, NTG<sup>+</sup>12a]. Nous avons aussi introduit dans ce même chapitre un opérateur qui permet d'extraire directement l'enveloppe moyenne et la construction d'une suite qui converge vers un opérateur d'extraction directe de mode sans passer par le *sifting process*. C'est ce que nous appelons *EMD sans sifting*. Dans le **chapitre 5**, nous étudions quelques applications de la décomposition modale empirique comme l'*EMD* pour image, le problème du mixage de modes, le débruitage par *EMD*, le tatouage, ainsi que l'analyse des composantes rythmiques dans les signaux électroencéphalogrammes (*EEG*) pour les Interfaces Cerveau-Machine (*ICM*) - *en anglais Brain Computer Interface (BCI)* -.

Enfin dans la troisième et dernière partie, nous introduisons d'abord dans le **chapitre 6** un nouvel interpolateur basé sur les équations aux dérivées partielles [NTD<sup>+</sup>13], qui constitue une étape cruciale pour la récupération de l'enveloppe du signal à partir des points caractéristiques qui peuvent être des maxima, des minima, des points de minimum et de maximum de courbure ou simplement des points d'inflexion, afin de pouvoir calculer les modes intrinsèques (*IMFs*) selon le principe de l'*EMD*. Dans le **chapitre 7** nous présentons une nouvelle méthode auto-adaptative de décomposition du signal : la *Décomposition Spectrale Intrinsèque (SID pour Spectrale Intrinsic Decomposition en anglais)* [NTDL12] avant de voir les applications de cette dernière à la recombinaison du signal et au débruitage [NTG<sup>+</sup>12b] dans le **chapitre 8**.



## Première partie

### Quelques méthodes d'analyse temps-fréquence et temps-échelle





# Chapitre 2

## De l'analyse de Fourier

### Sommaire

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>2.2</b>	<b>Représentation de Fourier</b>	<b>8</b>
2.2.1	Série de Fourier, Transformée de Fourier	8
2.2.2	Transformée de Fourier Discrète	9
2.2.3	Transformée de Fourier Rapide	10
<b>2.3</b>	<b>Transformée de Fourier à Fenêtre</b>	<b>11</b>
2.3.1	Atomes temps-fréquence	11
2.3.2	Transformée de Fourier à fenêtre	14
2.3.3	Densité d'énergie ou spectrogramme	15
<b>2.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>18</b>

### 2.1 Introduction

La représentation temporelle et la représentation fréquentielle, bien que contenant toute l'information relative au signal ne mettent pas toujours en évidence toutes les caractéristiques fines de ce signal. La plupart des signaux du monde réel ne sont pas stationnaires, et c'est justement dans l'évolution de leurs caractéristiques (statistiques, fréquentielles, temporelles, spatiales) que réside l'essentiel de l'information qu'ils contiennent. Les signaux vocaux et les images sont à ce titre exemplaires. L'analyse de Fourier propose une approche globale du signal, les intégrations sont faites de moins l'infini à plus l'infini, et toute notion de localisation temporelle (ou spatiale pour des images) disparaît dans l'espace de Fourier ; il faut donc trouver un compromis, une transformation qui renseigne

sur le contenu fréquentiel tout en préservant la localisation afin d'obtenir une représentation temps-fréquence ou espace-échelle du signal. Une première approche consiste à une amélioration de la transformée de Fourier à travers la transformée de Fourier à fenêtre glissante.

## 2.2 Représentation de Fourier

### 2.2.1 Série de Fourier, Transformée de Fourier

Considérons une fonction  $f(t) \in L^2([-T/2, T/2])$ . On définit ses coefficients de Fourier par :

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i2\pi kt/T} dt \quad (2.1)$$

et sa série de Fourier par :

$$\mathcal{S}f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}[k] e^{i2\pi kt/T} \quad (2.2)$$

L'un des résultats centraux de la théorie des séries de Fourier est que la famille  $\{\frac{1}{T} e^{i2\pi kt/T}\}$  est une base hilbertienne de  $L^2([-T/2, T/2])$  et donc qu'au sens de la convergence  $L^2$  :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}[k] e^{i2\pi kt/T} \quad (2.3)$$

La transformée de Fourier définie sur  $L^2(\mathbb{R})$  peut être vue comme un passage à la limite sur  $T$  des séries de Fourier. L'analogue du coefficient de Fourier est la transformée de Fourier :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{Z}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (2.4)$$

où  $\omega$  est l'analogue de  $2\pi k/T$ .

L'égalité de  $f$  et de sa série de Fourier se transforme en une formule de reconstruction de  $f$  à partir de  $\hat{f}$  au sens de  $L^2$  :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{Z}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (2.5)$$

Cette analogie est plus que formelle et on peut montrer à l'aide de la théorie des distributions qu'il s'agit en fait de la même chose ! Celle-ci permet de définir la transformée de Fourier d'une fonction périodique et l'on obtient une distribution qui vaut 0 sauf aux points  $2\pi k/T$  où l'on trouve un *Dirac* dont le poids est exactement le coefficient de Fourier  $c_k$ . Réciproquement, la transformée de Fourier d'une telle distribution, dite échantillonnée à un pas  $2\pi/T$ , donne une fonction  $T$  périodique.

### 2.2.2 Transformée de Fourier Discrète

Dans la pratique, on a jamais accès à une fonction  $f$  qu'elle soit de  $L^2(\mathbb{R})$  ou de  $L^2([-T/2, T/2])$  mais seulement à un nombre fini d'échantillons  $f[k] = f(k\delta)$  où  $k \in [0, N-1]$  et  $\delta$  est un pas d'échantillonnage. Comment définir une transformée de Fourier d'un tel signal? Une idée simple est de voir  $f[k]$  comme les échantillons d'une fonction  $N\delta$ -périodique, et de définir des coefficients de Fourier à l'aide d'une somme de Rieman [Rad68] :

$$\hat{f}[k] = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] e^{-2i\pi kl\delta/T} = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} f[l] e^{-2i\pi kl/N} \quad (2.6)$$

On vérifie aisément que  $f[k]$  est périodique de période  $N$  et que cette décomposition correspond en fait à la décomposition dans la famille orthogonale définie par :

$$\{e^{i2\pi kl/N}\} \quad k \in [0, N-1] \quad (2.7)$$

Ceci donne alors immédiatement une formule de reconstruction :

$$f[k] = \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} \quad (2.8)$$

On démontre cette formule par le calcul directe :

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{f}[j] e^{2i\pi jl/N} e^{-2i\pi kl/N} \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \left( f[k] + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \hat{f}[j] e^{2i\pi jl/N} e^{-2i\pi kl/N} \right) \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= f(k) + \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{N-1} \hat{f}[j] \left( \sum_{l=0}^{N-1} e^{2i\pi(j-k)l/N} \right) \\ \sum_{l=0}^{N-1} \hat{f}[l] e^{2i\pi kl/N} &= f[k] \end{aligned}$$

La dernière ligne s'obtient en appliquant l'égalité  $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ ,  $\sum_{j=0}^{N-1} x^j = \frac{1-x^N}{1-x}$  pour  $x = e^{2i\pi(j-k)l/N}$  (avec  $j \neq k$ ).

**Remarque 2.2.1** Lorsque l'on calcule numériquement une transformée de Fourier, il faut bien faire attention au fait que c'est en effet la transformée de Fourier Discrète de la périodisation d'une restriction de  $f$  échantillonnée qui est calculée!

### 2.2.3 Transformée de Fourier Rapide

La *FFT* - *Fast Fourier Transform* - [CLW69] est un algorithme rapide permettant de calculer la Transformée de Fourier Discrète de  $f$ , c'est à dire les  $N$  coefficients  $\hat{f}[k]$  à partir des  $f[k]$  observés. L'algorithme en question requiert  $O(N \log N)$  multiplications au lieu des  $O(N^2)$  de l'algorithme naïf. Pour l'algorithme naïf on doit calculer  $N$  coefficients, et chaque calcul nécessite  $N$  multiplications et  $N$  sommes, si l'on utilise la définition de la transformée discrète. Par une stratégie "*diviser pour mieux régner*" on va illustrer comment on peut diminuer ce coût. Supposons que  $N$  est paire :  $N = 2M$ . Notons  $g$  et  $h$  les deux fonctions  $M$  périodiques définies de la manière suivante :

$$(g[1], \dots, g[M]) = (f[0], f[2], \dots, f[2M-2])$$

$$(h[1], \dots, h[M]) = (f[1], f[3], \dots, f[2M-1])$$

Remarquons alors :  $\hat{g}[k+M] = \hat{g}[k]$  et  $\hat{h}[k+M] = \hat{h}[k]$ .

Ecrivons  $\omega_M = e^{2i\pi/M}$  (ce qui donne  $\omega_M^M = 1$ ) pour simplifier les notations. On calcule la transformée en  $k_0$  de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \hat{f}[k_0] &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{2M-1} f[k] \omega_{2M}^{kk_0} \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k] \omega_{2M}^{2kk_0} + \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k+1] \omega_{2M}^{(2k+1)k_0} \quad (\text{termes paires / impaires}) \\ &= \frac{1}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k] \omega_{2M}^{2kk_0} + \frac{\omega_{2M}^{k_0}}{2M} \sum_{k=0}^{M-1} f[2k+1] \omega_{2M}^{(2k)k_0} \end{aligned}$$

Ce qui donne selon la valeur de  $k_0$  la formule :

$$\hat{k}_0 = \begin{cases} \frac{1}{2} \left( \hat{g}[k_0] + \omega_{2M}^{k_0} \hat{h}[k_0] \right) & \text{si } 0 \leq k_0 \leq M-1 \\ \frac{1}{2} \left( \hat{g}[k_0 - M] + \omega_{2M}^{k_0} \hat{h}[k_0 - M] \right) & \text{si } M \leq k_0 \leq 2M-1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Notons  $C(n)$  le nombre de multiplications nécessaires pour calculer une transformée d'un signal ayant  $n$  échantillons. On observe alors la récurrence :

$$C(2n) = 2 * C(n-1) + 3n - 2. \quad (2.10)$$

On a besoin de calculer la transformée discrète de  $g$  et  $h$  (coût :  $2C(n)$ ), pour chacun des  $n$  indices, on a une multiplication par le terme  $\frac{1}{2}$  et une multiplication par le terme  $\omega_{2M}^{k_0}$  (coût :  $2n$ ). Enfin le calcul des  $n$  termes  $\omega_n^0, \dots, \omega_n^{n-1}$  s'obtient en calculant  $\omega_n$ , puis

par multiplication successive par ce terme on obtient les autres  $n - 1$  (coût :  $n - 2$ ). Pour les puissances de 2 la récurrence s'écrit :

$$C(2n) = 2C(2^{n-1}) + O(n). \quad (2.11)$$

On en déduit que

$$C(2^n) = O(n2^n). \quad (2.12)$$

C'est l'ordre de grandeur attendu. On généralise en complétant le signal par des zéros pour arriver à la puissance de 2 immédiatement supérieure. L'ordre de grandeur reste en  $O(N \log(N))$ .

**Remarque 2.2.2** Pour information si  $n = 10^6$ ,  $n^2 = 10^{12}$  alors que  $n \log(n) = 1.381 \times 10^6$

## 2.3 Transformée de Fourier à Fenêtre

### 2.3.1 Atomes temps-fréquence

Soit  $f$  un signal de  $L^2(\mathbb{R})$  que l'on souhaite analyser, et soit  $\phi$  une fonction de  $L^2(\mathbb{R})$  normalisée à 1 :

$$\|\phi\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(t)|^2 dt = 1. \quad (2.13)$$

Considérons le produit scalaire dans  $L^2$  :

$$\langle f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \phi^*(t) dt. \quad (2.14)$$

Si la fonction  $\phi$  est localisée autour d'une position  $u$ , alors  $\langle f, \phi \rangle$  ne dépend que des valeurs prises par  $f(t)$  au voisinage de  $t = u$ . De même, dans le domaine fréquentiel, par la formule de Parseval,

$$\langle f, \phi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \hat{\phi}^*(\omega) d\omega. \quad (2.15)$$

Si la fonction  $\hat{\phi}$  est localisée autour d'une fréquence  $\xi$ , alors  $\langle f, \phi \rangle$  ne dépend que des valeurs prises par  $\hat{f}(\omega)$  au voisinage de  $\omega = \xi$ .

Afin de déterminer si, autour d'un instant  $u$  donné, un signal  $f$  a de l'énergie à la fréquence  $\xi$ , il suffit de calculer le produit scalaire de  $f$  avec une fonction  $\phi$  qui soit

concentrée à la fois en temps autour de  $u$  et en fréquence autour de  $\xi$  : c'est ce qu'on appelle un *atome temps-fréquence*.

Précisons ce qu'on entend par la concentration d'une fonction en temps et en fréquence. On appelle  $u$  la position moyenne de  $\phi$ , définie par :

$$u = \int t |\phi(t)|^2 dt. \quad (2.16)$$

La translation d'une fonction modifie sa position moyenne : si  $\phi(t)$  a pour position moyenne 0, alors  $\phi(t - u)$  a pour position moyenne  $u$ . La concentration temporelle de  $\phi$  autour de  $u$  est mesurée par l'inverse de la variance temporelle  $\sigma_t^2$  :

$$\sigma_t^2 = \int (t - u)^2 |\phi(t)|^2 dt. \quad (2.17)$$

Plus  $\phi$  est concentrée autour de  $u$ , plus la variance temporelle  $\sigma_t$  est petite. La translation d'une fonction ne modifie pas sa concentration.

De même, on définit la fréquence moyenne de  $\phi$  par :

$$\xi = \frac{1}{2\pi} \int \omega \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (2.18)$$

La modulation d'une fonction modifie sa fréquence moyenne : si  $\phi(t)$  a pour fréquence moyenne 0, alors  $\exp(i\xi t)\phi(t)$  a pour fréquence moyenne  $\xi$ . La concentration fréquentielle de  $\phi$  autour de  $\xi$  est mesurée par l'inverse de sa variance fréquentielle  $\sigma_\omega^2$  :

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int (\omega - \xi)^2 \left| \hat{\phi}(\omega) \right|^2 d\omega \quad (2.19)$$

La modulation d'une fonction par  $\exp(i\xi t)$  ne modifie pas sa concentration fréquentielle.

Le théorème suivant montre qu'il y a une limite à la concentration temps-fréquence conjointe. Plus une fonction est concentrée en temps, moins elle est concentrée en fréquence. Dans le cadre de la physique quantique, le résultat a été démontré par *Weyl*, pour des fonctions de probabilité de présence. On obtient alors le *principe d'incertitude* : lorsqu'on augmente la certitude sur la position d'une particule on augmente l'incertitude sur sa quantité de mouvement.

**Théorème 2.3.1 Principe d'incertitude :** Soit  $\phi \in C^1$  telle que  $|\phi| = 1$  ;  $\phi$ ,  $t\phi(t)$  et  $\phi'(t)$  soient dans  $L^2$  et  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t}\phi(t) = 0$ . La variance spatiale et la variance temporelle de  $\phi$  satisfont :

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (2.20)$$

Cette inégalité est une égalité si et seulement si il existe  $(u, \xi, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$  tels que :

$$\phi(t) = a \exp [i\xi t - b(t - u)^2]. \quad (2.21)$$

**Démonstration :** Si les positions moyennes de  $\phi$  en temps et en fréquence sont  $u$  et  $\xi$ , alors les positions moyennes de  $\exp(-i\xi t)\phi(t+u)$  en temps et en fréquence sont toutes deux nulles. Il suffit donc de montrer le théorème pour  $u = \xi = 0$ . Remarquons que :

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int |t\phi(t)|^2 dt \int |\omega \hat{\phi}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.22)$$

Comme  $i\omega \hat{\phi}(\omega)$  est la transformée de Fourier de  $\phi'(t)$ , l'identité de Plancherel appliquée à  $i\omega \hat{\phi}(\omega)$  donne :

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 = \frac{1}{2\pi} \int |t\phi(t)|^2 dt \int |\phi'(t)|^2 dt. \quad (2.23)$$

Par l'inégalité de Schwarz, le fait que  $|z|^2 \geq \operatorname{Re}(z)^2$ , et que  $(|\phi|^2)' = (\phi\phi^*)' = \phi'\phi^* + \phi(\phi^*)'$ ,

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 \sigma_\omega^2 &\geq \left| \int t\phi'(t)\phi^*(t) dt \right|^2 \\ &\geq \left| \int \frac{t}{2} (\phi'(t)\phi^*(t) + \phi'^*(t)\phi(t)) dt \right|^2 \\ &\geq \frac{1}{4} \left| \int t(|\phi(t)|^2)' dt \right|^2 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse  $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{t}\phi(t) = 0$ , on obtient après intégration par parties

$$\sigma_t^2 \sigma_\omega^2 \geq \frac{1}{4} \left[ \int |\phi(t)|^2 dt \right]^2 \geq \frac{\|\phi\|^4}{4} \quad (2.24)$$

Pour atteindre l'égalité, il faut que l'inégalité de Schwarz soit elle-même une égalité. Cela implique qu'il existe  $b \in \mathbb{C}$  tel que :

$$\phi'(t) = -2bt\phi(t). \quad (2.25)$$

Il existe donc  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $\phi(t) = a \exp(-bt^2)$ . Les inégalités de la suite de la preuve sont aussi des égalités, ce qui fait que le minorant est effectivement atteint.

Le théorème 2.3.1 montre que les gaussiennes modulées

$$\phi(t) = a \exp[i\xi t - b(t-u)^2] \quad (2.26)$$

sont des fonctions qui ont une concentration temps-fréquence maximale : elles s'appellent les fonctions de *Gabor*. Le principe d'incertitude impose ainsi une limite supérieure à la concentration temps-fréquence.



### 2.3.2 Transformée de Fourier à fenêtre

On appelle atome de Fourier à fenêtre une fonction  $g_{u,\xi}$  construite en translatant de  $u$  et en modulant par  $e^{i\xi t}$  une fonction  $g(t)$  réelle et paire :

$$g_{u,\xi}(t) = e^{i\xi t} g(t - u) \quad (2.27)$$

Les fonctions de Gabor (2.26) sont un exemple d'atomes de Fourier à fenêtre, construits à partir d'une fonction gaussienne. La gaussienne  $g(t)$  doit être normalisée de sorte que  $\|g\| = \|g_{u,\xi}\| = 1$ , c'est-à-dire :

$$g(x) = (\pi\sigma^2)^{-1/4} \exp\left(-\frac{t^2}{4\sigma^2}\right) \quad (2.28)$$

La transformée de Fourier à fenêtre (ou encore à fenêtre glissante) de  $f \in L^2$  est définie par produit scalaire avec  $g_{u,\xi}$  :

$$\mathcal{S}f(u, \xi) = \langle f, g_{u,\xi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \quad (2.29)$$

On peut voir la fonction  $g(t - u)$  comme une "fenêtre" qui permet de localiser  $f$  autour de  $u$  avant de prendre sa transformée de Fourier. La transformée de Fourier à fenêtre [All77] génère une fonction à deux variables réelles,  $\mathcal{S}f(u, \xi)$ , à partir d'une fonction  $f(t)$  d'une seule variable : il y a une redondance d'information. Le théorème suivant, dû à Gabor, montre qu'il est possible de reconstruire  $f$  à partir de sa transformée de Fourier à fenêtre.

**Théorème 2.3.2 (Formule d'inversion)** Si  $f \in L^2$  alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}f(u, \xi) g(t - u) e^{i\xi t} d\xi du \quad (2.30)$$

**Démonstration :** La transformée de Fourier en  $u$  de  $f_{\xi}(u) = \mathcal{S}f(u, \xi)$  se calcule en remarquant que :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}f(u, \xi) &= \exp(-iu\xi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) \exp[i\xi(u - t)] dt \\ &= \exp(-iu\xi) f * g_{\xi}(u), \end{aligned}$$

avec  $g_{\xi}(t) = g(t) \exp(i\xi t)$ , car  $g(t) = g(-t)$ . Sa transformée de Fourier vaut donc :

$$\hat{f}_{\xi}(\omega) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_{\xi}(\omega + \xi) = \hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}_{\xi}(\omega),$$

La transformée de Fourier de  $g(t - u)$  selon la variable  $u$  vaut  $\hat{g}(\omega)e^{-it\omega}$ . On peut maintenant appliquer la formule de Parseval par rapport à la variable  $u$  du membre de droite de (2.30). On a donc comme  $g$  est réelle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{S}f(u, \xi) g(t - u) \exp(i\xi t) du d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega + \xi) |\hat{g}(\omega)|^2 \exp[it(\omega + \xi)] d\omega \right) d\xi. \end{aligned}$$

Si  $\hat{f} \in L^1$ , on peut appliquer le théorème de Fubini pour changer l'ordre d'intégration. Le théorème de transformée de Fourier inverse montre que :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega + \xi) \exp[it(\omega + \xi)] d\xi = f(t).$$

Comme  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |g|^2 d\omega = 1$ , on en déduit (2.30). Pour  $\hat{f} \notin L^1$ , la formule se démontre par un argument de densité (notamment les fonctions  $C^\infty$  à support compact sont denses dans  $L^2$ ).

### 2.3.3 Densité d'énergie ou spectrogramme

On définit une densité d'énergie appelée *spectrogramme* et notée  $P_S$  :

$$P_S f(u, \xi) = |\mathcal{S}f(u, \xi)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - u) e^{-i\xi t} dt \right|^2 \quad (2.31)$$

Le théorème suivant justifie l'interprétation du spectrogramme comme une densité d'énergie, car son intégrale dans le plan temps-fréquence est égale à l'énergie du signal.

**Théorème 2.3.3** (Conservation de l'énergie) : Si  $f \in L^2$  alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{S}f(u, \xi)|^2 d\xi du. \quad (2.32)$$

**Démonstration :** Comme la transformée de Fourier selon  $u$  de  $\mathcal{S}f(u, \xi)$  est :

$$\hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega),$$

l'application de la formule de Plancherel au membre de droite de (2.32) donne :

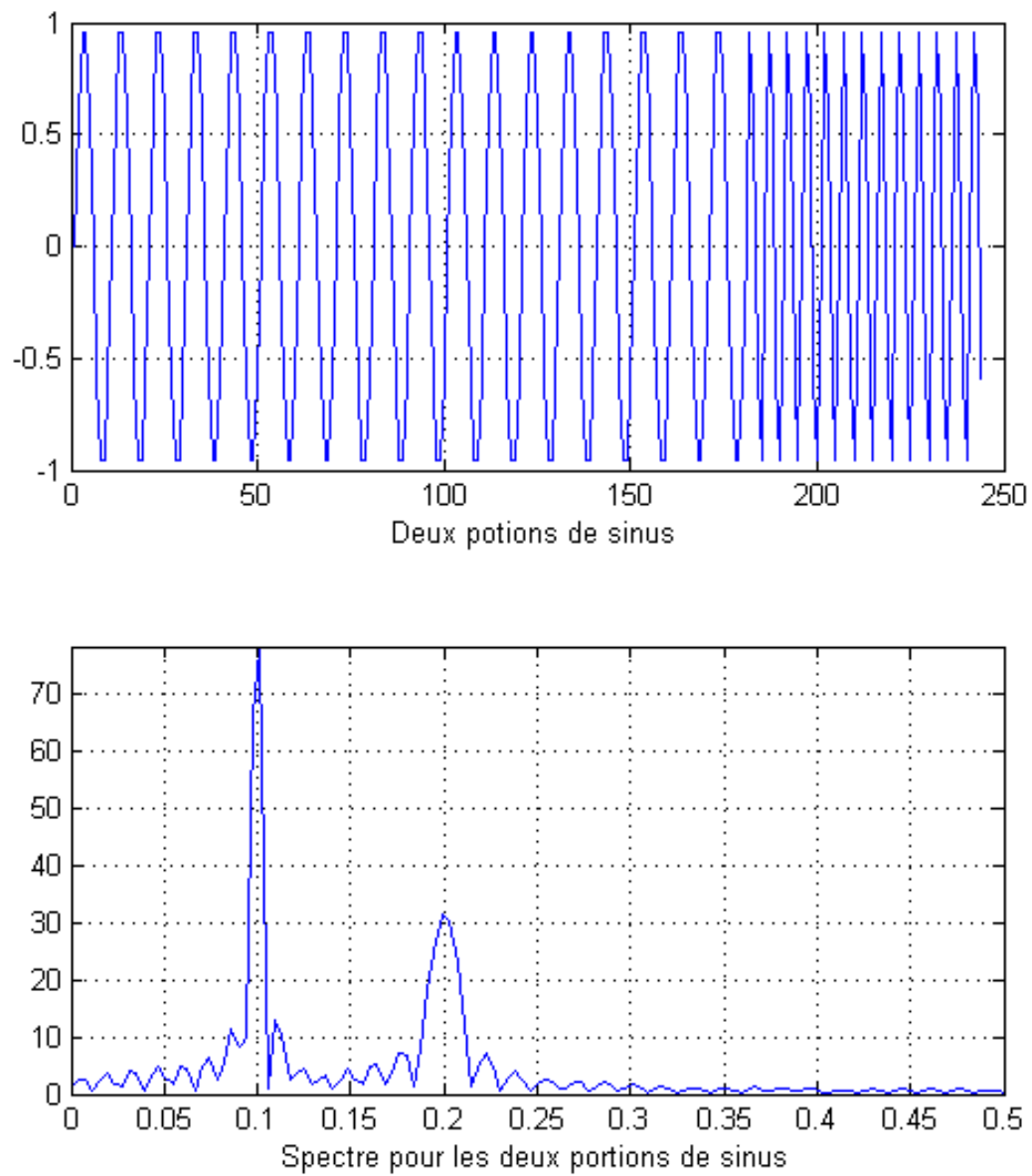
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{S}f(u, \xi)|^2 du d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega + \xi) \hat{g}(\omega)|^2 d\omega d\xi$$

*Le théorème de Fubini s'applique, et la formule de Plancherel montre que*

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\omega + \xi)|^2 d\xi = \|f\|^2,$$

*ce qui implique (2.32).*

Le spectrogramme mesure l'énergie de  $f$  dans le voisinage temps-fréquence de  $(u, \xi)$  défini par la variance temporelle et la variance fréquentielle de  $g$  (cf : (2.17) et (2.19)). Ainsi, la localisation précise de l'énergie de  $f$  dans le plan temps-fréquence, autrement dit la *résolution* de la transformée de Fourier à fenêtre dépend de la concentration temps-fréquence de  $g$ .



**FIGURE 2.1** — On observe sur la figure, les deux pics situées aux fréquences 0.1 et 0.2. On ne peut cependant pas déduire l'ordre dans lequel apparaissent les deux sinusoïdes.

## 2.4 Conclusion

La transformé de Fourier à fenêtre glissante permet d'analyser un signal au travers d'une fenêtre temps-fréquence. Ces fenêtres sont fixes et ont toujours la même résolution en temps et en fréquence. Certains signaux sont une succession de phases stationnaires, où la fréquence est stable sur une longue durée, et de phase transitoire, où il y a de fortes variations de fréquence sur une courte durée. C'est en fait le cas de beaucoup de signaux, comme par exemple dans la modélisation d'une note de musique ou une image présentant des textures. D'où l'idée d'adapter la dimension des fenêtres temps-fréquence afin de trouver un meilleur compromis sur la précision temporelle/fréquentielle. Les ondelettes, de par leurs propriétés mathématiques intéressantes, permettent une décomposition multi-résolution, multi-échelle pouvant assurer une meilleure compréhension du signal simultanément dans le domaine temporel que fréquentiel.

Chapitre

3

# Transformée en ondelettes et analyse multi-résolution

## Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>20</b>
<b>3.2</b>	<b>Décomposition en Ondelettes</b>	<b>20</b>
3.2.1	Localisation temps-fréquence	20
3.2.2	Les Ondelettes	20
3.2.3	Analyse Multirésolution	21
3.2.4	Analyse Multirésolution (à fonction d'échelle) orthogonale	22
<b>3.3</b>	<b>Décomposition en ondelettes orthogonales</b>	<b>24</b>
<b>3.4</b>	<b>Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales</b>	<b>25</b>
3.4.1	Décomposition	26
3.4.2	Reconstruction	27
<b>3.5</b>	<b>Moments nuls - Régularité - Taille des supports</b>	<b>27</b>
3.5.1	Moments nuls et Régularité	27
3.5.2	Taille du support	27
<b>3.6</b>	<b>Bases d'ondelettes biorthogonales</b>	<b>28</b>
<b>3.7</b>	<b>Ondelettes en deux dimensions</b>	<b>28</b>
3.7.1	Transformation de Fourier <i>2D</i>	28
3.7.2	Ondelettes <i>2D</i>	29
3.7.3	Exemples	29
3.7.4	Transformée en Ondelettes <i>2D</i> directionnelle	31
3.7.5	Analyse multi-résolution <i>2D</i>	32
<b>3.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>35</b>

---

### 3.1 Introduction

LES RECHERCHES tant théoriques qu'appliquées se sont très largement développées ces dernières années au point que les ondelettes sont maintenant très à la mode. On a parfois voulu en faire l'outil idéal adapté à tous les problèmes. Beaucoup de thématiques de recherche s'orientent vers les transformées de signaux périodiques ou à support compact, les transformées multidimensionnelles, les transformées adaptées au problème, les analyses multi-ondelettes, la déconvolution des signaux bruités, les approches multi-échelles dans les algorithmes stochastiques et bien entendu la mise en œuvre des algorithmes de transformée en ondelettes discrète.

### 3.2 Décomposition en Ondelettes

#### 3.2.1 Localisation temps-fréquence

Une des insuffisances de la transformation de Fourier est la suivante : Supposons que l'on veuille détecter une fréquence élevée dans un signal confus. Supposons que le signal corresponde aux temps  $[0, T]$ , que la fréquence à étudier apparaisse au temps  $T_1 > 0$  et disparaisse au temps  $T_2 < T$ . Supposons que l'on soit intéressé par ces temps inconnus d'apparition et d'extinction. Si le signal est très vibratoire, un simple regard sur le signal en temps ne montre pas l'information. Le spectre quant à lui, bien qu'il contienne toute l'information du signal, ne montre pas davantage les dates recherchées. Il faudrait faire un certain nombre de transformations de Fourier avec des petites fenêtres glissantes. Selon les fenêtres, le phénomène pourrait être présent ou absent. En jouant sur la taille des fenêtres on pourrait ainsi déceler l'information recherchée. Ce type d'analyse a été étudié et mis en œuvre, conduisant à la transformée de Fourier à fenêtre glissante et aux *Gabarottes*. Les ondelettes unifient et formalisent ces idées. Elles fournissent l'équivalent des fenêtres glissantes et apportent en plus la flexibilité de leur taille.

#### 3.2.2 Les Ondelettes

Les ondelettes sont en gros des fonctions oscillantes, comme les  $e^{-2i\pi\omega x}$ , mais dépendant de deux paramètres, l'un concerne la disposition de l'ondelette sur l'axe des  $x$ , l'autre mesure sa concentration autour de cette disposition, à la manière des gaussiennes  $e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$  - *qui ne sont pas oscillantes* - où  $m$  indique la position de la gaussienne sur l'axe des  $x$  et  $\sigma$  mesure sa concentration.

En effectuant le produit scalaire d'un signal avec une ondelette, on va obtenir une information sur le comportement du signal au voisinage du point où se concentre l'onde-

lette. Un signal constant dans ce voisinage donnera 0, un signal très lisse ou beaucoup plus irrégulier que l'ondelette donnera une petite valeur, un signal ayant un comportement analogue à celui de l'ondelette donnera une valeur maximale. Les ondelettes vont former une base hilbertienne où l'on va décomposer les signaux, de la même manière que les signaux périodiques le sont dans la base des ondes pures  $e^{-2i\pi nx/T}$ . Elles obéissent à un formalisme qui cache beaucoup les objectifs recherchés. On va l'exposer dans le cadre de la multirésolution, en dimension un.

### 3.2.3 Analyse Multirésolution

On dit qu'une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{C}$  est une *fonction d'échelle* s'il existe une suite de coefficients  $h_k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , tels que

$$\phi(x/2) = \sqrt{2} \sum_{k=k_0}^{k=k_1} h_k \phi(x - k) \quad (3.1)$$

**Note :** Le facteur  $\sqrt{2}$  varie avec les auteurs, ainsi que la possibilité pour  $k_0$  et/ou  $k_1$  de prendre des valeurs infinies. Pour pouvoir calculer il faudra que  $k_0$  et  $k_1$  soient finis et que  $\phi$  soit à support compact.

On dit qu'une suite  $V_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  de sous espaces vectoriels fermés de  $L^2(\mathbb{R})$  forme une *Analyse Multirésolution* si :

- ❶  $\dots \subset V_{j+1} \subset V_j \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset L^2$
- ❷  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$  est dense dans  $L^2$
- ❸  $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = 0$
- ❹  $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x/2) \in V_{j+1}$
- ❺  $\forall k \in \mathbb{Z}, f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in V_j$
- ❻ Il existe une fonction d'échelle  $\phi \in L^2$  telle que  $\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}$  est une base de Riesz de  $V_0$ , non nécessairement orthogonale.

**Notes :**

- Attention, selon les auteurs la suite des  $V_j$  croît avec  $j$  ou l'inverse. Pour les uns [Mal00], que l'on suit ici, un grand  $j$  positif indique un niveau de dilatation élevé - faible résolution, détails grossiers, approximation grossière -, pour les autres c'est l'inverse [Kei03].
- La condition (6.) signifie que toute fonction  $f$  de  $V_0$  s'exprime comme suit :

$$f(x) = \sum_k c_k \phi(x - k) \quad (3.2)$$



la convergence ayant lieu dans  $L^2$ , et qu'en plus, il existe  $0 < A \leq B$ , indépendants de  $f$ , tels que :

$$A \sum |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \leq B \sum |c_k|^2 \quad (3.3)$$

- La condition (6.) exprime la propriété importante de l'analyse multirésolution, à savoir que les  $V_j$  sont constitués des fonctions de  $V_0$  *dilatées* au facteur  $2^j$  ou c'est la même chose, *comprimées* au facteur  $2^{-j}$ .
- Les  $\phi_{j,k} = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$  forment une base de  $V_j$ , ils ont même norme que  $\phi$ . Si  $\phi_{j,k}$  a un support de longueur  $L$ , celui de  $\phi_{j+1,k}$ , est de longueur  $2L$ .
- Comme  $V_1 \subset V_0$ , et comme les  $\phi(x - k)$  forment une base de  $V_0$ ,  $\phi(x/2) \in V_1$  est nécessairement la somme d'une série de termes en  $\phi(x - k)$ . Mais en indiquant que  $\phi$  est une fonction d'échelle, on a déjà précisé cela.

### 3.2.4 Analyse Multirésolution (à fonction d'échelle) orthogonale

On dit que l'analyse multirésolution est orthogonale si la fonction d'échelle  $\phi$  est orthogonale, c'est-à-dire si la base des  $\phi(x - k)$  est orthonormée, ou encore si :

$$(\phi(x), \phi(x - k)) = \int \phi(x) \overline{\phi(x - k)} dx = \delta_{0,k}, k \in \mathbb{Z} \quad (3.4)$$

**Remarques :**

- Deux fonctions  $\phi$  différentes peuvent engendrer la même analyse multirésolution.
- On peut démontrer [Kei03, p. 12] que si elles sont orthogonales elles se déduisent l'une de l'autre par un décalage  $k$  et un facteur constant de module 1.
- On peut démontrer aussi [Mal00, p. 222] que pour toute analyse multirésolution on peut trouver une fonction d'échelle orthogonale (théorique). Cette propriété rend la définition ci-dessus assez impropre. Il faut comprendre qu'elle porte sur la fonction d'échelle et non sur la suite des  $V_j$  proprement dite.
- Comme la base des  $\phi(x - k)$  est orthonormée, c'est une base hilbertienne de  $V_0$ . Il en résulte aussi que les  $\phi_{j,k}$  forment une base hilbertienne de  $V_j$ .

On note  $P_j$  la projection orthogonale de  $L^2$  sur  $V^j$ ,  $Q_j = P_{j-1} - P_j$ ,  $W_j$  l'image de  $Q_j$ .

**Propriétés :**

- ❶  $Q_j$  est la projection orthogonale sur  $W_j = Q_j L^2$ .
- ❷  $V_{j-i} = V_j \oplus W_j$
- ❸ Pour  $f \in L^2$  on a

- (a)  $P_i f = \sum_k (f, \phi_j, k) \phi_{j,k}$
- (b)  $P_j f \rightarrow f$  dans  $L^2$  quand  $j \rightarrow -\infty$

**Note :**  $P_{j-1}f$  représente une approximation grossière de  $f$  à l'ordre  $j-1$ .  $P_j f$  représente une approximation plus grossière.  $Q_j f$  mesure le niveau de détails entre les deux approximations.

**Théorème 3.2.1** (*Théorème de la multirésolution* [Kei03, p. 23].) *Pour toute analyse multirésolution à fonction d'échelle orthogonale  $\phi$ ,*

- ❶  $V_j$  et  $W_j$  sont deux sous espaces orthogonaux complémentaires de  $V_{j-1}$ ,  
 $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$
- ❷  $V_n = \bigoplus_{j=n+1}^{\infty} W_j$
- ❸  $\bigoplus_j W_j$  est dense dans  $L^2$
- ❹  $W_i \perp W_j$  si  $i \neq j$
- ❺  $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x/2) \in W_{j+1}$
- ❻  $f(x) \in W_j \Leftrightarrow f(x - 2^j k) \in W_j$
- ❼ Il existe une fonction (non unique)  $\psi \in L^2$  telle que  $\{\psi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de  $W_0$  et telle que  $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k), j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$  forme une base orthonormée de  $L^2$ .
- ❽  $\psi \in V_{-1}, \psi(x/2) \in V_0$ . On peut exprimer  $\psi(x/2)$  par

$$\psi(x/2) = \sqrt{2} \sum_k g_k \phi(x - k) \quad (3.5)$$

avec  $g_k = (-1)^k h_{N-k}$ ,

où  $N$  est un entier impair, par exemple  $N = k_0 + k_1$ .

On dit que  $\psi$  est l'ondelette mère associée à la fonction d'échelle  $\phi$  et que les fonctions

$$\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) \quad (3.6)$$

sont les ondelettes d'indices  $j, k$ . Pour  $j$  fixé,  $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$  est une base de  $W_j$ . Si  $\psi$  a un support de longueur  $l$ , les supports des  $\psi_{j,k}$  sont de longueur  $2^j l$ . L'indice  $j$  indique le niveau de détail que l'ondelette  $\psi_{j,k}(x)$  permet d'analyser, et l'indice  $k$  indique la position de l'ondelette sur l'axe des  $x$ .

### 3.3 Décomposition en ondelettes orthogonales

Soit  $f$  un élément de  $L^2$ . D'après le point (7.) du théorème de la multirésolution,  $f$  peut se décomposer dans la base  $\{\psi_{j,k} = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k)\}$ . On peut écrire

$$f = \sum_{k,j} (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k} \quad (3.7)$$

et encore

$$f = \sum_j Q_j f \quad (3.8)$$

Car les projections  $Q_j$  sont données par

$$Q_j f = \sum_k (f, \psi_{j,k}) \psi_{j,k} \quad (3.9)$$

Pour un niveau  $n$  fixé, on peut écrire

$$f = \sum_{j=-\infty}^{j=n} Q_j f + \sum_{j=n+1}^{j=\infty} Q_j f \quad (3.10)$$

où on peut remplacer  $\sum_{j=n+1}^{j=\infty} Q_j f$  par  $P_n f$  grâce au (2.) du théorème de la multirésolution. On obtient finalement

$$f = P_n f + \sum_{j=-\infty}^{j=n} Q_j f \quad (3.11)$$

qui constitue une *décomposition de  $f$  en ondelettes*.

La décomposition est formée de deux types d'éléments : une approximation au niveau  $n$ , c'est  $P_n f \in V_n$ , et une suite de détails de plus en plus fins, ce sont les  $Q_j f \in W_j$  - *plus  $j$  tend vers  $-\infty$  plus  $Q_j f$  est fin, plus  $j$  tend vers  $+\infty$  plus  $Q_j f$  est grossier* -.

Pour un calcul effectif, on partira nécessairement d'une fonction  $f$  qui est déjà dans un  $V_n$ , donnée par ses coefficients dans la base des  $\phi_{n,k}$ , c'est-à-dire telle que  $P_n f = f$ .

Décomposer  $f$  en ondelettes jusqu'au niveau d'approximation (de détails)  $l = n + p$  consiste alors à effectuer  $p$  projections des  $V_j$  sur ses composantes  $V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}$  selon

$$f = P_n f = s_n + d_n, s_n \in V_n, d_n = 0 \in W_n$$

$$f = P_{n+1}s_n + Q_{n+1}s_n = s_{n+1} + d_{n+1}, \quad s_{n+1} \in V_{n+1}, \quad d_{n+1} \in W_{n+1}$$

$$f = P_{n+2}s_{n+1} + Q_{n+2}s_{n+1} + d_{n+1} = s_{n+2} + d_{n+2} + d_{n+1}, \quad s_{n+2} \in V_{n+2}, \quad d_{n+2} \in W_{n+2}$$

...

$$f = s_l + d_l + d_{l-1} + \dots + d_{n+1}, \quad s_l \in V_l, \quad d_l \in W_l$$

Dans ces décompositions successives, à chaque étape on extrait les détails les plus fins que l'on puisse trouver.  $d_{n+1}$  contient les détails de niveau  $n + 1$  qui sont les plus fins, qui s'expriment avec les  $\psi_{n+1,k}$  qui sont fines. On n'y touche plus. Puis on extrait de  $s_{n+1} \in V_{n+1}$  les détails de niveau  $n + 2$  qui sont plus grossiers, qui s'expriment à l'aide des  $\psi_{n+2,k}$  moins fines. Et ainsi de suite. On s'arrête au niveau  $l = n + p$ . A ce stade  $s_l \in V_l$  est l'approximation la plus grossière de  $f$ ; on dispose de tous les niveaux de détails, du plus grossier  $d_l$  au plus fin  $d_{n+1}$ , permettant une reconstitution sans perte de  $f$ . La décomposition conserve toute l'information contenue dans  $f$ , dont on a ordonné les niveaux de détails. De cette façon on obtient une représentation de  $f$  à partir de laquelle on peut opérer du filtrage, de la compression, ou d'autres manipulations.

### 3.4 Algorithmes de décomposition-reconstruction en ondelettes orthogonales

Le passage des ondelettes continues aux calculs concrets pose les mêmes délicats problèmes que pour la transformation de Fourier. Il conviendrait ici aussi d'étudier les décompositions en ondelettes discrètes, les décompositions avec un nombre fini d'ondelettes, les liens avec la décomposition continue, comme on l'a fait pour la transformation de Fourier discrète. Il s'agit d'objets mathématiques différents. Pour une étude plus complète, voir le travail de *Cohen* dans [Coh92]. On va se contenter de présenter les algorithmes de calculs dans le cas discret fini, sans étudier précisément les liens avec le cas continu.

Les calculs en cascade sont basés sur les formules de récurrences suivantes :

**Théorème 3.4.1** (*Théorème de la multirésolution* [Kei03, p. 41], [Mal00, p. 251].)

On considère une ondelette orthogonale  $(\phi, \psi)$  connue par les coefficients  $(h_k, g_k)$ . Soit  $f \in L^2$ . En notant  $s_j[k]$  et  $d_j[k]$  les composantes de  $f$  dans la base des  $V_j$  et  $W_j$ , c'est-à-dire

$$s_j[k] = (f, \phi_{j,k}) \quad \text{et} \quad d_j[k] = (f, \psi_{j,k})$$

On a :

### Décomposition

$$s_{j+1}[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{p-2k} s_j[p] = s_j \star h^-[2k]$$

$$d_{j+1}[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_{p-2k} s_j[p] = s_j \star g^-[2k]$$

### Recomposition

$$s_j[k] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} h_{k-2p} s_{j+1}[p] + \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_{k-2p} d_{j+1}[p] = \tilde{s}_{j+1} \star h[k] + \tilde{d}_{j+1} \star g[k]$$

où  $\star$  dénote le produit de convolution de deux suites,  $x^-$  est la suite  $x^-[p] = x[-p]$ ,  $\tilde{x}$  est la suite dont tous les termes de rang impair ont été mis à zéro.

Ce théorème donne un moyen de calcul. Mais à la condition que, partant d'un niveau  $n$ , on dispose des coefficients  $s_n[k]$ , que ces  $s_n[k]$  soient en nombre fini, et que les formules ne fassent intervenir qu'un nombre fini de termes.

**Passage au cas fini :** On part d'une suite finie de  $N$  valeurs  $y_k$ ,  $k = 0 \dots N-1$ . Ces valeurs sont sensées être les coefficients des  $\phi_{n,k}$  représentant une fonction  $f \in V_n$ , à un certain niveau  $n$ . On veut décomposer  $f$  jusqu'au niveau  $n+p$ , c'est-à-dire calculer les coefficients des ondelettes dans chacun des niveaux intermédiaires en utilisant les formules de récurrence du théorème. On suppose que les coefficients  $h_k$  et  $g_k$  non nuls sont en nombre fini  $K$

#### 3.4.1 Décomposition

Les calculs de la décomposition se déroulent de la manière suivante : En reprenant les notations précédentes. On part de :

- $s_n[0], s_n[1] \dots s_n[N-1]$  qui décrivent  $f$  au niveau  $n$  selon :

$$f = s_n = s_n[0]\phi_{n,0} + \dots + s_n[N-1]\phi_{n,N-1},$$

avec éventuellement un décalage dans les  $k$ .

- Au niveau  $n+1$ , grâce aux formules de récurrence, avec traitement adapté des valeurs aux bords, on obtient  $s_{n+1}[0] \dots s_{n+1}[N/2-1]$ ,  $d_{n+1}[0] \dots d_{n+1}[N/2-1]$  correspondant à :

$$s_{n+1} = s_{n+1}[0]\phi_{n+1,0} + \dots + s_{n+1}[N/2-1]\phi_{n+1,N/2-1}$$

$$d_{n+1} = d_{n+1}[0]\phi_{n+1,0} + \dots + d_{n+1}[N/2-1]\phi_{n+1,N/2-1}$$

...

- Au niveau  $n + p$  on calcule  $s_{n+p}[0] \dots s_{n+p}[N/2^p - 1]$ ,  $d_{n+p}[0] \dots d_{n+p}[N/2^p - 1]$  correspondant à  $s_{n+p}$  et  $d_{n+p}$ .

**Nombre d'opérations :** Mis à part éventuellement un traitement particulier pour les bords, compte tenu du fait que les  $h_k$  et  $g_k$  non nuls sont au nombre de  $K$ , pour décomposer du niveau  $n$  au niveau  $n + p$  il faut  $2(NK + \frac{N}{2}K + \dots + \frac{N}{2^p}K)$  opérations, c'est-à-dire moins de  $4NK$ . *C'est un algorithme rapide.*

### 3.4.2 Reconstruction

C'est le même principe, à l'envers. On remonte grâce au fait qu'à chaque niveau,  $s_j = s_{j+1} + d_{j+1}$ , grâce au fait que les coefficients des  $s_{j+1}$  et  $d_{j+1}$  sont disponibles et grâce aux formules de récurrence permettant de calculer les coefficients de  $s_j$  en fonction de ceux de  $s_{j+1}$  et  $d_{j+1}$ .

## 3.5 Moments nuls - Régularité - Taille des supports

### 3.5.1 Moments nuls et Régularité

Comme dans tout développement en série, il est intéressant que le terme général converge rapidement vers 0 et qu'il y ait peu de coefficients significatifs. On démontre [Mal00, p. 238] que la vitesse de convergence est liée aux nombre de moments nuls de l'ondelette.

On dit qu'une ondelette  $\psi$  telle que  $x^k \psi \in L^1$ ,  $k = 0 \dots p - 1$ , a  $p$  moments nuls si :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^k \psi(x) dx = 0, k = 0 \dots p - 1 \quad (3.12)$$

Ceci conduit à rechercher des ondelettes ayant un grand nombre de moments nuls. L'ondelette de *Haar* a un moment nul, c'est peu. Les ondelettes *Daubechies*  $D2, \dots, D10$  ont 2, ..., 10 moments nuls et 4, ..., 20 coefficients. *C'est mieux.*

**Note :** Le fait que les  $\psi_{j,k}$  soient d'intégrale nulle pourrait sembler un peu incompatible avec le fait qu'elles forment une base de  $L^2$ . *Ce n'est pas incompatible parce que  $L^1 \neq L^2$ .*

### 3.5.2 Taille du support

Il y a tout intérêt à ce que le support des ondelettes soit compact et le plus petit possible. En effet, si  $f$  a une grande variation au voisinage de  $x_0$ , pour que cette singularité intervienne dans moins de coefficients, il est nécessaire que le support des ondelettes soit

le plus petit possible. Malheureusement, en ce qui concerne les ondelettes orthogonales, ceci est incompatible avec la possibilité d'avoir de nombreux moments nuls. On démontre [Mal00, p. 247] que si  $\psi$  a  $p$  moments nuls son support est de taille au moins  $2p - 1$ .

### 3.6 Bases d'ondelettes biorthogonales

Il existe beaucoup de types d'ondelettes, aucun ne surpasse tous les autres. Les ondelettes orthogonales sont les plus simples à présenter et les moins difficiles à programmer. Elles ont l'inconvénient de ne pas être à la fois compactes, régulières, symétriques. Les ondelettes biorthogonales ne sont pas orthogonales comme leur nom pourrait le faire croire. Elles forment un couple d'ondelettes duales, qui apporte plus de souplesse, permettant d'avoir à la fois régularité, compacité, symétrie. Elles sont utilisées dans la compression *JPEG2000* [TM04]. Les formules de décomposition et de reconstruction sont quasiment les mêmes, au lieu des deux suites de coefficients,  $h_k$  et  $g_k$ , il y a quatre suites  $h_k, g_k, \tilde{h}_k, \tilde{g}_k$ . Voir [Kei03, p. 41], [Mal00, p. 264].

### 3.7 Ondelettes en deux dimensions

#### 3.7.1 Transformation de Fourier 2D

La représentation fréquentielle des signaux 2D est l'extension directe de celle des signaux monodimensionnels. La transformée  $F(u, v)$  de Fourier d'un signal 2D  $f(x, y)$  est :

$$F(u, v) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) e^{-2i\pi(xu+yv)} dx dy. \quad (3.13)$$

La reconstitution du signal spatial se fait par transformation inverse :

$$f(x, y) = \iint_{\mathbb{R}^2} F(u, v) e^{2i\pi(xu+yv)} du dv. \quad (3.14)$$

La transformée de Fourier est une fonction complexe, qui a pour chaque composante un module et une phase. Elle possède les mêmes propriétés que la transformation de Fourier 1D.

### 3.7.2 Ondelettes 2D

$\psi \in L^1(\mathbb{R}^2) \cap L^2(\mathbb{R}^2)$  est une ondelette si elle remplit la condition d'admissibilité suivante :

$$C_\psi = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{\|k\|^2} dk < +\infty. \quad (3.15)$$

Cette propriété implique que

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x) dx = 0. \quad (3.16)$$

Dans la pratique, on utilise souvent une condition plus forte en imposant à l'ondelette un nombre  $p$  de *moments nuls* :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \|x\|^n \psi(x) dx = 0, \forall n = 0, 1, \dots, p-1 \text{ et } \iint_{\mathbb{R}^2} \|x\|^n \psi(x) dx \neq 0 \text{ ailleurs.}$$

Cette propriété signifie que la transformée de Fourier de l'ondelette doit s'annuler comme  $\|k\|^p$  en  $k = 0$  dans l'espace spectral. A partir d'une ondelette mère  $\psi(x)$ , la famille d'ondelettes est définie par dilatation, rotation et translation :

$$\psi(a, b, \theta)(x) = \frac{1}{a} \psi \left( R_\theta \left( \frac{x - b}{a} \right) \right) \quad (3.17)$$

avec  $b \in \mathbb{R}^2$ ,  $a$  une échelle positive et  $R_\theta$  la rotation d'angle  $\theta$  de  $\mathbb{R}^2$ , de matrice

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

### 3.7.3 Exemples

**Ondelette de Morlet anisotrope :** Soit  $u_\alpha = (\cos\alpha, \sin\alpha)$  le vecteur unitaire dans la direction  $\alpha$ . L'ondelette de Morlet (complexe) est :

$$\psi(x) = e^{-\pi\|x\|^2} e^{2i\pi 5xu} \quad (3.18)$$



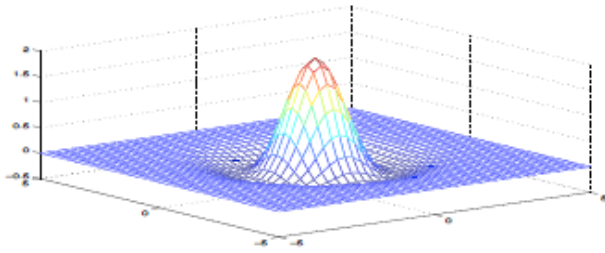
**Ondelettes isotropes :** Laplaciens itérés de Gaussienne : pour  $n \geq 1$ , on définit une ondelette  $h_{2n}$  par :

$$h_{2n}(x) = (-1)^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^n e^{-\pi \|x\|^2}. \quad (3.19)$$

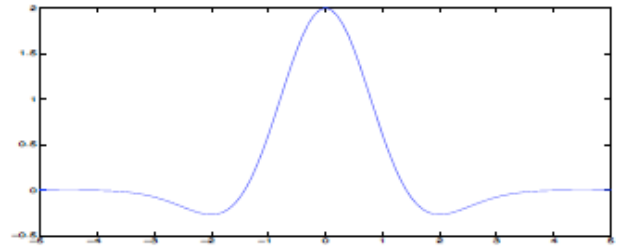
Sa transformée de Fourier est :

$$\hat{h}_{2n}(k) = 4^n \pi^{2n} \|k\|^2 n e^{-\pi \|k\|^2}, \quad (3.20)$$

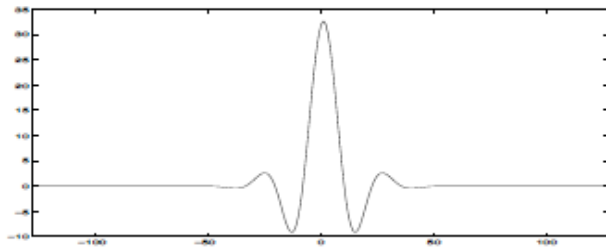
$h_2$  est le Laplacien de la Gaussienne, couramment utilisé en Vision par ordinateur. Dans la littérature,  $h_2$  est appelée communément *le chapeau mexicain*. L'ondelette  $h_{2n}$  a exactement  $2n$  moments nuls. Le maximum de sa transformée de Fourier  $\hat{h}_{2n}$  se trouve en  $k_0 = \sqrt{2n}$ .



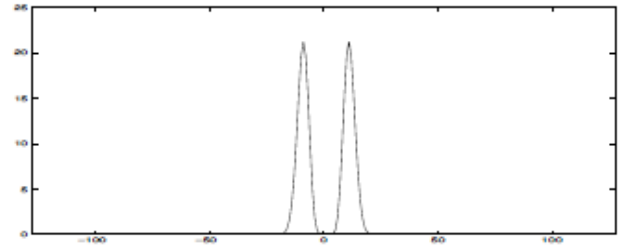
(a) Ondelette  $h_2(x, y)$  - *chapeau mexicain* -



(b) Coupe en  $x$  de l'ondelette  $h_2(x, y)$



(c) Coupe dans de l'ondelette  $h_8$



(d) Représentation spectrale de l'ondelette  $h_8$

**FIGURE 3.1** — Exemples d'ondelettes dérivées de Gaussiennes isotropes.

### 3.7.4 Transformée en Ondelettes 2D directionnelle

Soit  $\psi$  une ondelette 2D. La transformée en ondelettes directionnelle d'une fonction est définie par :

$$Wf(a, b, \theta) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi_{a,b,\theta}(x)} dx = \frac{1}{a} \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \overline{\psi \left( R_\theta \left( \frac{x-b}{a} \right) \right)} dx \quad (3.21)$$

Par le théorème de *Parseval* on a :

$$Wf(a, b, \theta) = a \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x) \overline{\hat{\psi}(aR_\theta k)} e^{i\pi k b} dk \quad (3.22)$$

**Formule de reconstruction :** La fonction  $f$  peut être reconstruite par la formule suivante :

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} Wf(a, b, \theta) \psi_{a,b,\theta}(x) \frac{da}{a^3} d\theta db \quad (3.23)$$

avec

$$c_\psi = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}(k)|^2}{\|k\|^2} dk$$

La conservation de l'énergie s'écrit avec les coefficients d'ondelettes :

$$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{c_\psi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} |Wf(a, b, \theta)|^2 \frac{da}{a^3} d\theta db \quad (3.24)$$

**Formule de synthèse avec une ondelette différente :** Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ . La décomposition en ondelettes de  $f(x)$  avec une ondelette d'analyse  $g : a > 0, b \in \mathbb{R}^2, \varphi \in [0, 2\pi]$  s'écrit :

$$W_g f(a, b, \varphi) = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{a} \bar{g} \left( R_\varphi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right) dx \quad (3.25)$$

La synthèse avec une ondelette de reconstruction  $h$  s'écrit :

$$f(x) = \frac{1}{c_{gh}} \int_0^{+\infty} \iint_{\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} Wf(a, b, \theta) \psi_{a,b,\varphi} \frac{1}{a} h \left( R_\varphi \left( \frac{x-b}{a} \right) \right) \frac{da}{a^3} db d\varphi \quad (3.26)$$

La condition d'admissibilité sur les fonctions  $g$  et  $h$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  est :

$$c_{gh} = \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{\hat{g}}(k)\hat{h}(k)}{\|k\|^2} dk \quad (3.27)$$

### 3.7.5 Analyse multi-résolution 2D

Les bases 2D sont construites par produits tensoriels de bases d'ondelettes 1D.

Soient  $\varphi$  la fonction d'échelle et  $\psi$  l'ondelette provenant d'une AMR 1D. On a deux constructions possibles :

- Les bases d'ondelettes tensorielles ou anisotropes :

$$\Phi_{k,k',j,j'}(x,y) = \psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y), \quad j, j' \in \mathbb{Z}, \quad k, k' \in \mathbb{Z}$$

La transformée en ondelettes 2D associée utilise la FWT 1D sur les lignes puis sur les colonnes de l'image.

- Ondelettes issues de l'AMR de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  :

$$\mathcal{V}_j = V_j \otimes V_j$$

L'espace de détails (ondelettes) est  $W_j$  donné par :

$$\mathcal{V}_{j+1} = \mathcal{V}_j \otimes V_j$$

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{j+1} &= V_{j+1} \otimes V_{j+1} = (V_j \otimes W_j) \otimes (V_j \otimes W_j) \\ &= (V_j \otimes V_j) \oplus (W_j \otimes V_j) \oplus (V_j \otimes W_j) \oplus (W_j \otimes W_j) \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathcal{W} = Vect \{ \psi_{j,k}(x)\varphi_{j',k'}(y); \varphi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y); \psi_{j,k}(x)\psi_{j',k'}(y) | k, k' \in \mathbb{Z}^2 \}$$

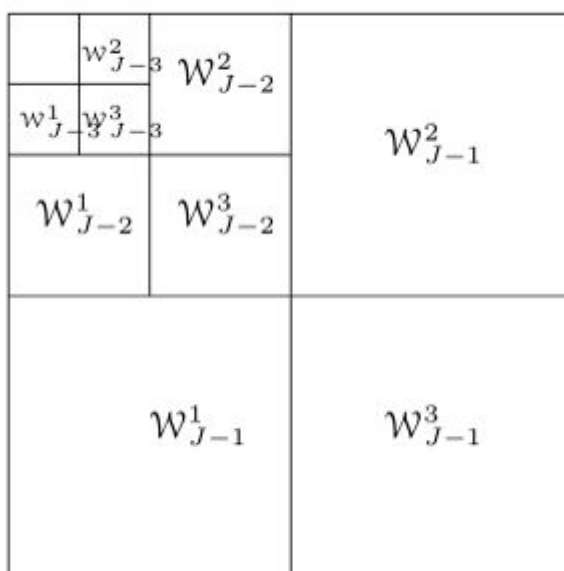
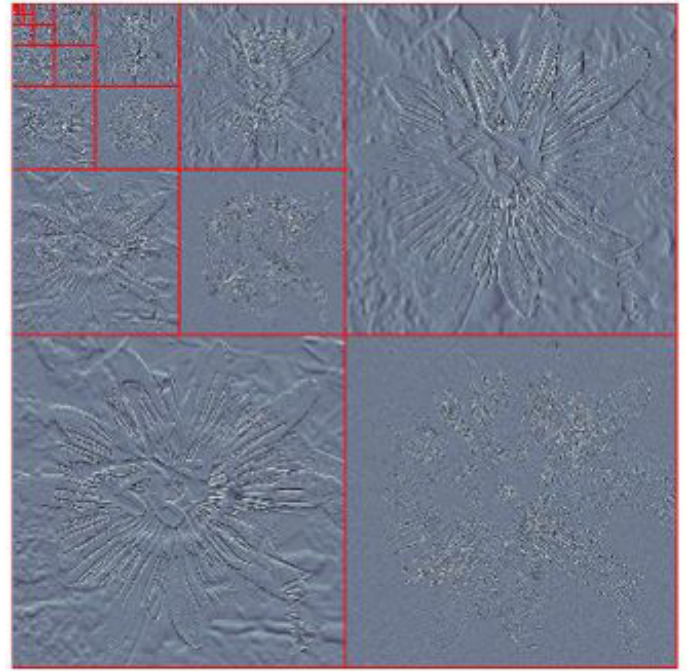


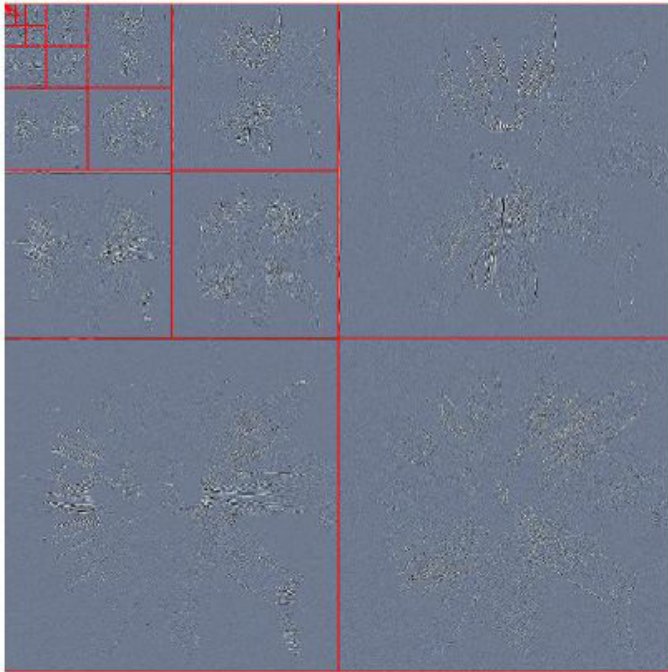
FIGURE 3.2 – Décomposition multi-résolution 2D



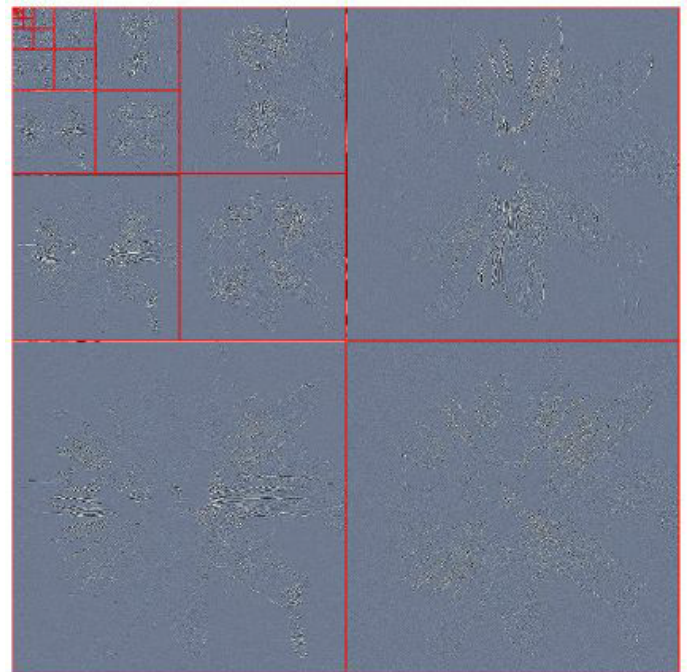
(a) Originale



(b) Haar



(c) Daubechies 8



(d) Symmlet 4

**FIGURE 3.3** — Décomposition multi-résolution sur différentes bases d'ondelettes

## 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les bases théoriques de la transformée en ondelettes qui est une méthode d'analyse temps-fréquence très convoitée ces dernières années par la recherche fondamentale et appliquée. Nous avons également présenté le concept d'analyse multi-résolution qui apporte une réponse aux limites posées par la transformée de Fourier, en vue d'obtenir une précision pour un signal donné, aussi bien dans le domaine temporel que fréquentiel. Une extension à deux dimensions nous permet d'appliquer ces mêmes principes pour l'analyse et le traitement des images.



## Deuxième partie

### Décomposition Modale Empirique et applications en traitement du signal et de l'image





Chapitre

4

# Sur La Décomposition Modale Empirique

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>40</b>
<b>4.2</b>	<b><i>EMD</i> : Méthode originelle ou <i>EMD</i> classique</b>	<b>40</b>
4.2.1	Quelques définitions	40
4.2.2	Principe	41
4.2.3	Algorithme	42
4.2.4	Exemples	45
4.2.5	Prise en charge des effets de bord	50
4.2.6	Critères d'arrêt	50
<b>4.3</b>	<b>Propriétés fondamentales de l'<i>EMD</i></b>	<b>51</b>
4.3.1	Non-linéarité	51
4.3.2	Pseudo-orthogonalité	52
4.3.3	Localité	52
4.3.4	Aspect multirésolution	52
4.3.5	Auto-adaptativité	53
<b>4.4</b>	<b>Analyse Spectrale de Hilbert</b>	<b>53</b>
<b>4.5</b>	<b>Différentes variantes de l'<i>EMD</i></b>	<b>54</b>
4.5.1	<i>EMD</i> B-spline	54
4.5.2	<i>EMD</i> locale	55
4.5.3	<i>EMD</i> en ligne	56
4.5.4	Ensemble <i>EMD</i>	56
<b>4.6</b>	<b>Quelques extensions de l'<i>EMD</i></b>	<b>57</b>
4.6.1	<i>EMD</i> pour les signaux à valeurs complexes	57
4.6.2	<i>EMD</i> pour les signaux à $n$ composantes	57
4.6.3	Approche <i>EDP</i> pour l' <i>EMD</i>	58
4.6.4	A propos de l'orthogonalité pour l' <i>EMD</i>	60
<b>4.7</b>	<b>Vers l'<i>EMD</i> sans <i>sifting</i></b>	<b>60</b>
4.7.1	Opérateur enveloppe moyenne	60
4.7.2	Construction de l'opérateur d'extraction directe de modes	62

4.7.3	Convergence de l' <i>EMD sans sifting</i> . . . . .	65
4.7.4	Quelques résultats . . . . .	65
4.7.5	Forme analytique . . . . .	70
4.7.6	Quelques exemples . . . . .	70
4.8	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>72</b>

## 4.1 Introduction

LA DÉCOMPOSITION MODALE EMPIRIQUE - ou *EMD pour Empirical Mode Decomposition* - est une méthode algorithmique de décomposition adaptative du signal : au lieu d'analyser le signal dans une base fixe comme avec Fourier, on construit au fur et à mesure les fonctions de base, appelées *Fonction Mode Intrinsèque* en anglais *Intrinsic Mode Function* (*IMF*). Elle a été introduite pour traiter de manière relativement souple des données quelconques, pouvant être non-stationnaires et non-linéaires [HSLa98]. Cette méthode, relativement jeune, a fait depuis son introduction l'objet de nombreux travaux, la plupart essayant de la formaliser et de la justifier mathématiquement. En effet, le gros défaut de cette méthode a longtemps été l'absence de théorie, notamment pour le processus de tamisage, qui extrait les *IMFs*, appelé *Sifting Process* (*SP*). En cela s'ajoute le problème du mélange de modes et la présence d'intermittence. Des versions bidimensionnelles de l'*EMD* on vu le jour, mais restent pour la majorité très couteuses en complexité algorithmique. Ainsi, de nombreuses études ont modifié le fonctionnement de ce *sifting process*, ou bien l'ont formalisé à l'aide d'outils mathématiques solides, afin de justifier la méthode.

## 4.2 *EMD* : Méthode originelle ou *EMD* classique

### 4.2.1 Quelques définitions

**Définition 4.2.1 Notion de moyenne locale :** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}$  le domaine de définition d'une fonction  $x \in L^1_{loc}(\Omega)$  et  $I_\delta = [t - \frac{\delta}{2}, t + \frac{\delta}{2}]$ , une fenêtre d'observation. La moyenne locale du signal  $x$  définie au travers de  $I_\delta$  est donnée par :

$$Mloc_\delta[x](t) = \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta} x(y) dy \quad (4.1)$$

La fonction  $Mloc_\delta[x](t)$  est plus régulière que  $x$  en ce sens qu'elle est dérivable sur  $I_\delta$ .

**Définition 4.2.2** *L'enveloppe moyenne d'un signal  $s$  est une extension de la notion de moyenne locale. En pratique, elle est définie par la demi-somme de ses enveloppes supérieure et inférieure, qui sont obtenues par interpolation des maxima et des minima respectivement. Il existe différentes méthodes d'interpolation pour les enveloppes. La plus utilisée est l'interpolation par spline cubique.*

**Définition 4.2.3** *Un IMF (pour Intrinsic Mode Function) est une fonction oscillante de moyenne nulle, c'est-à-dire une fonction :*

- dont le nombre d'extrema et le nombre de passages par zéro diffèrent d'au plus un.
- dont la moyenne locale, au sens de la définition précédente, est nulle en tout point.

**Définition 4.2.4** *Un signal AM-FM monocomposante est un signal pouvant s'écrire sous la forme :*

$$s(t) \triangleq a(t) \cos \left( \int_0^t 2\pi f(\tau) d\tau \right) \quad (4.2)$$

Cette définition contient à la fois la fonction AM,  $a(t)$  et la fonction FM,  $f(t)$ . Ces signaux sont largement utilisés et peuvent modéliser efficacement des systèmes comme la transmission d'informations dans un canal, les systèmes RADAR et SONAR. L'intérêt principal en traitement du signal est la facilité d'extraction d'informations relatives à des grandeurs comme l'amplitude instantanée  $a(t)$  et la fréquence instantanée  $f(t)$  à partir d'un signal modulé  $s(t)$ .

**Définition 4.2.5** *On appelle **Sifting Process** (SP) la procédure qui consiste à soustraire à un signal sa moyenne locale, plusieurs fois de suite jusqu'à obtenir une moyenne (quasi) nulle.*

**Définition 4.2.6** *Une **intermittence** est une perturbation additionnelle localisée sur un signal. Le fait d'avoir des propriétés d'un IMF le rend difficile à extraire sans une opération supplémentaire après sifting.*

**Définition 4.2.7** *Un **mixage de modes** ou **mode mixing** est une superposition, dans des proportions déterminées, de deux ou de plusieurs modes. Ce mélange garde toutefois les propriétés d'un IMF, ce qui rend difficile la séparation avec les méthodes classiques.*

## 4.2.2 Principe

L'EMD postule que tout signal réel se décompose en une *moyenne locale* ou *tendance locale*  $m$  et une *composante plus oscillante*  $d_1$ . On a ainsi :

$$s = d_1 + m \quad (4.3)$$

Considérons un signal  $s$ , l'*EMD* va le décomposer en une somme finie de modes oscillants. On pourra alors écrire :

$$s = \sum_{k=1}^N d_k + r \quad (4.4)$$

Les modes oscillants  $d_k$  appelés *IMFs* (*Intrinsic Mode Function*), sont des fonctions oscillantes autour de 0, et de moyenne locale nulle. Le résidu  $r$  est plutôt moins oscillant donc plus basse fréquence que  $d_k$ , c'est-à-dire qu'il contient au plus 3 extrema.

La méthode originale définit l'enveloppe supérieure d'un signal (resp. inférieure) comme l'interpolation par splines cubiques des maxima (resp. minima) du signal. On peut alors définir l'enveloppe moyenne comme demi-somme de ces deux enveloppes. L'algorithme consiste donc à extraire successivement les modes en soustrayant au signal son enveloppe moyenne. Cependant, les modes ainsi extraits ne sont pas des *IMF* : bien qu'ils oscillent autour de 0, ils ne pourront être ainsi que si leur moyenne locale est nulle. Le rôle du *sifting process* est de tamiser ces protomodes pour obtenir de véritables *IMFs*. Pour cela, on soustrait au mode son enveloppe moyenne, plusieurs fois, jusqu'à obtenir une moyenne locale - ou enveloppe moyenne - quasi-nulle.

### 4.2.3 Algorithme

---

#### Algorithm 1 : EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM

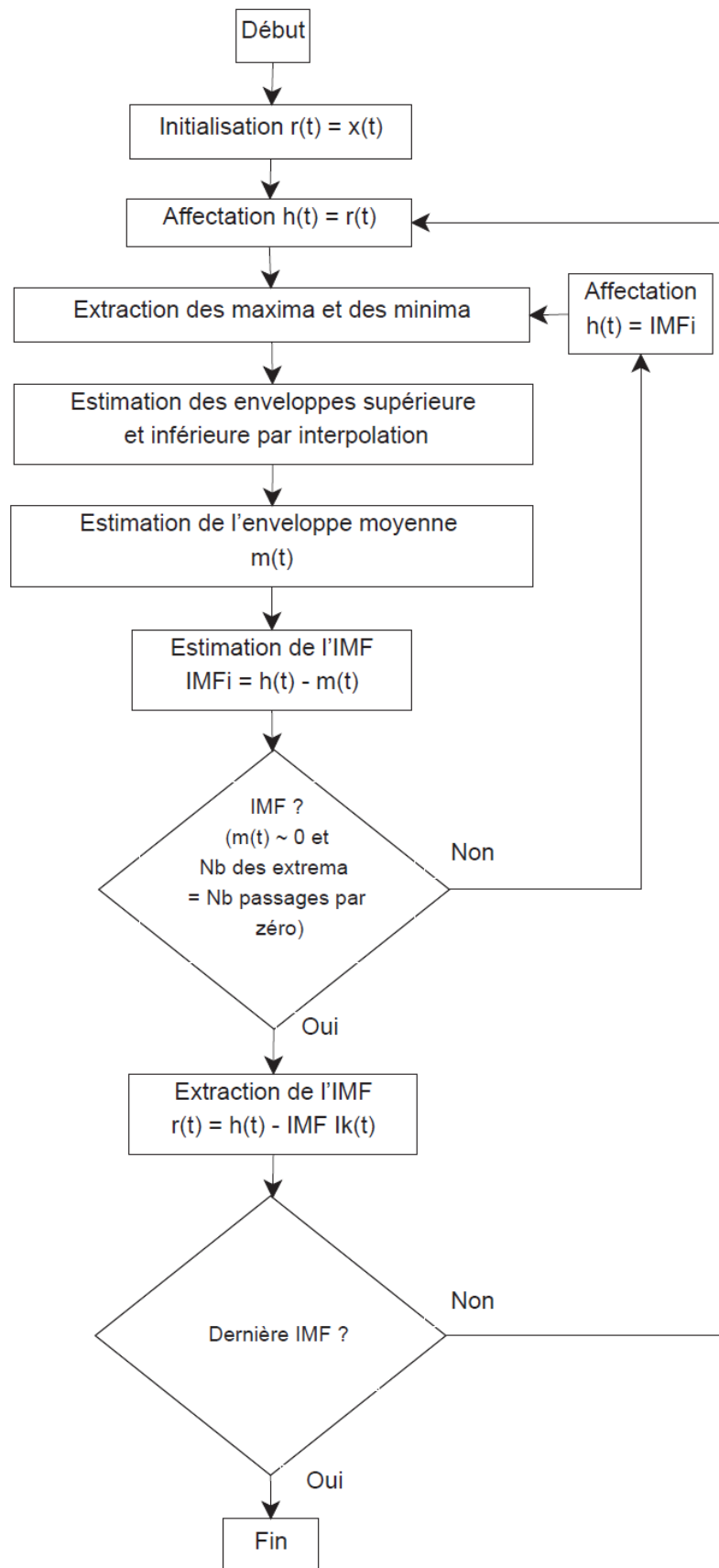
---

- 1: **Initialisation** :  $r = f, k = 1$
  - 2: **Calcul de l'enveloppe moyenne**  $e$  de  $r$  (i.e. la moyenne de l'enveloppe des minima et de l'enveloppe des maxima de  $r$ ).
  - 3: **Extraction de fonctions intermédiaires**  $p_i = r - e$  et posons  $r = e$ .
  - 4: **Tant que**  $p_i$  **n'est pas un IMF répéter**
    - Calcul de l'enveloppe moyenne  $e$  de  $p_i$
    - $p_{i+1} = p_i - e_i$  ;  $i = i + 1$
  - 5:  $d_k = p_i, r = r - d_k$
  - 6: Si  $r$  n'est pas monotone, retour à l'étape 2 et posons  $k = k + 1$  sinon la décomposition est terminée.
- 

Le *sifting process*, que l'on pourrait traduire par processus de tamisage, correspond à l'extraction d'un *IMF*, à partir d'un signal donné. La fonction de mode intrinsèque, ou *IMF*, ainsi obtenue peut être vue comme les détails du signal, de variation rapide. Pour cela, on extrait de façon itérative ces détails, jusqu'à conserver un *IMF*. Lorsqu'un *IMF* est extraite du signal, le signal résiduel est privé des variations les plus rapides, qui ont été capturées par la fonction mode intrinsèque. On constate ainsi expérimentalement une diminution du nombre d'extrema et donc l'arrêt de l'algorithme. En particulier, le dernier

résidu est une fonction monotone, qui traduit la tendance générale du signal. On aura finalement, une décomposition de la forme :

$$x(t) = m_N + \sum_{i=1}^N d_i \quad (4.5)$$

FIGURE 4.1 — Algorithme de la décomposition par *EMD*

### 4.2.4 Exemples

Voyons ici le comportement de l'EMD sur des exemples bien contrôlés. On considère des signaux dont on connaît *a priori* les différentes *IMFs*, par construction. Dans la figure 4.2 on voit bien comment l'EMD retrouve remarquablement bien les différentes composantes.

- *Signal – test<sub>1</sub>* : mélange de sinusoïdes (figure 4.2)

$$s_1 = \sum_{i=1}^3 \sin(2\nu_i \pi t),$$

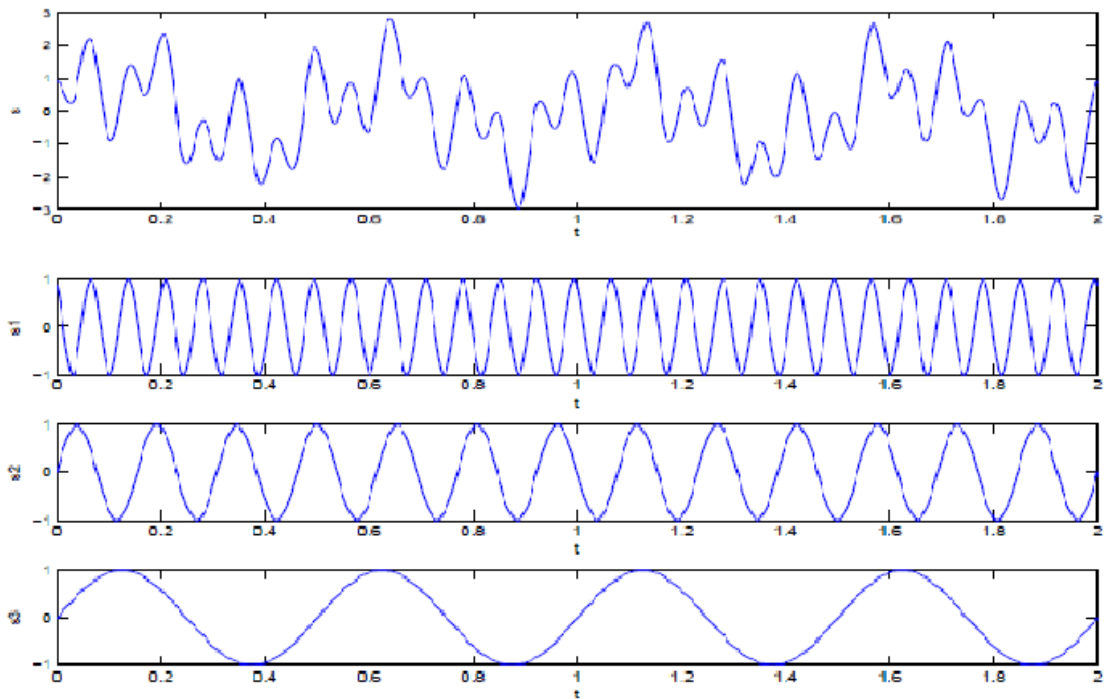
avec  $\nu_1 = 28$ ,  $\nu_2 = 13$  et  $\nu_3 = 4$ .

- *Signal – test<sub>2</sub>* : mélange de sinusoïdes modulées AM/FM (figure 4.3)

$$s_2 = \sum_{i=1}^3 a_i(t) \sin(\phi_i(t)t),$$

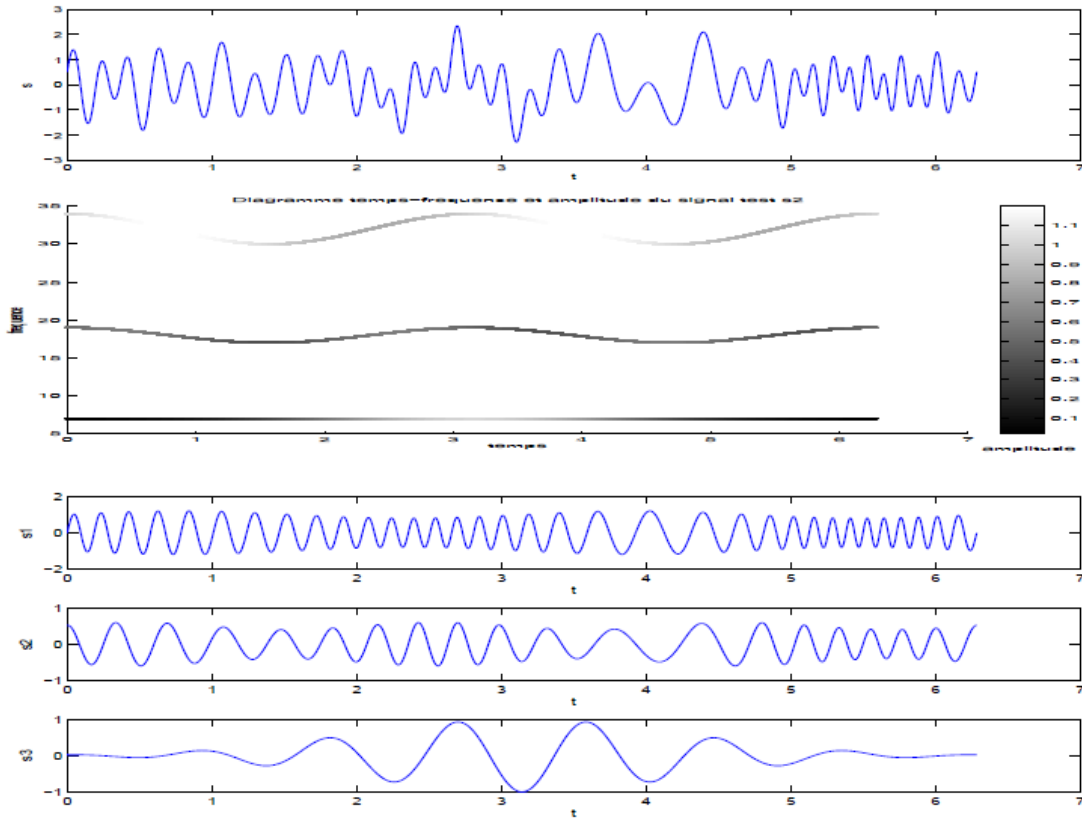
On ne donnera pas l'écriture analytique des amplitudes et fréquences instantanées de chaque composante, mais on pourra se reporter à la figure.

- *Signal – test<sub>3</sub>* : Signal oscillant discontinu (figure 4.4).



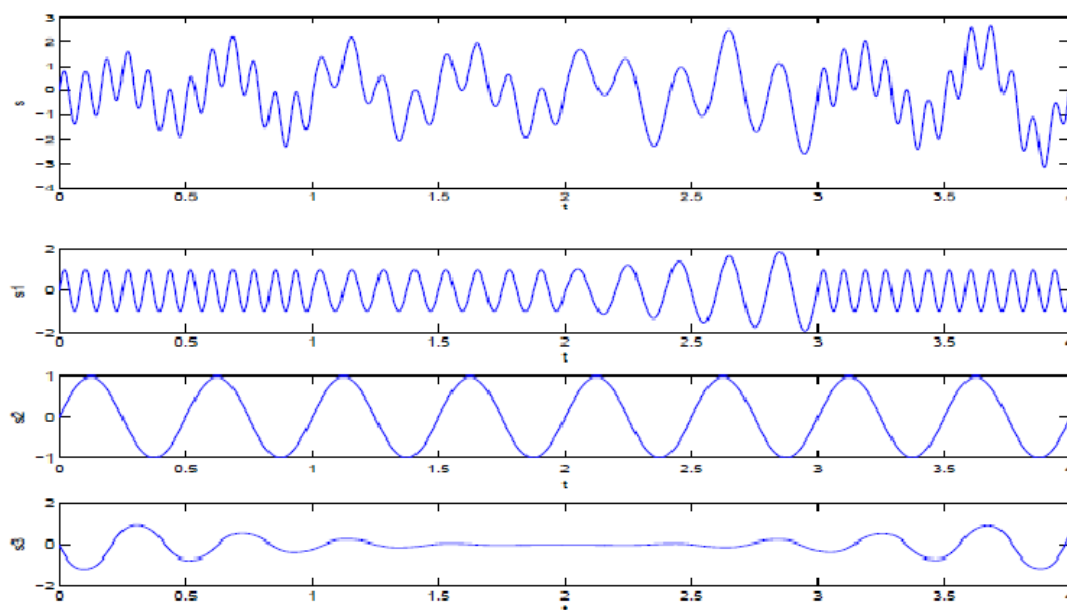
**FIGURE 4.2** – *Signal – test<sub>1</sub>* : mélange de sinusoïdes. En haut : le signal original. En bas : ses trois composantes.



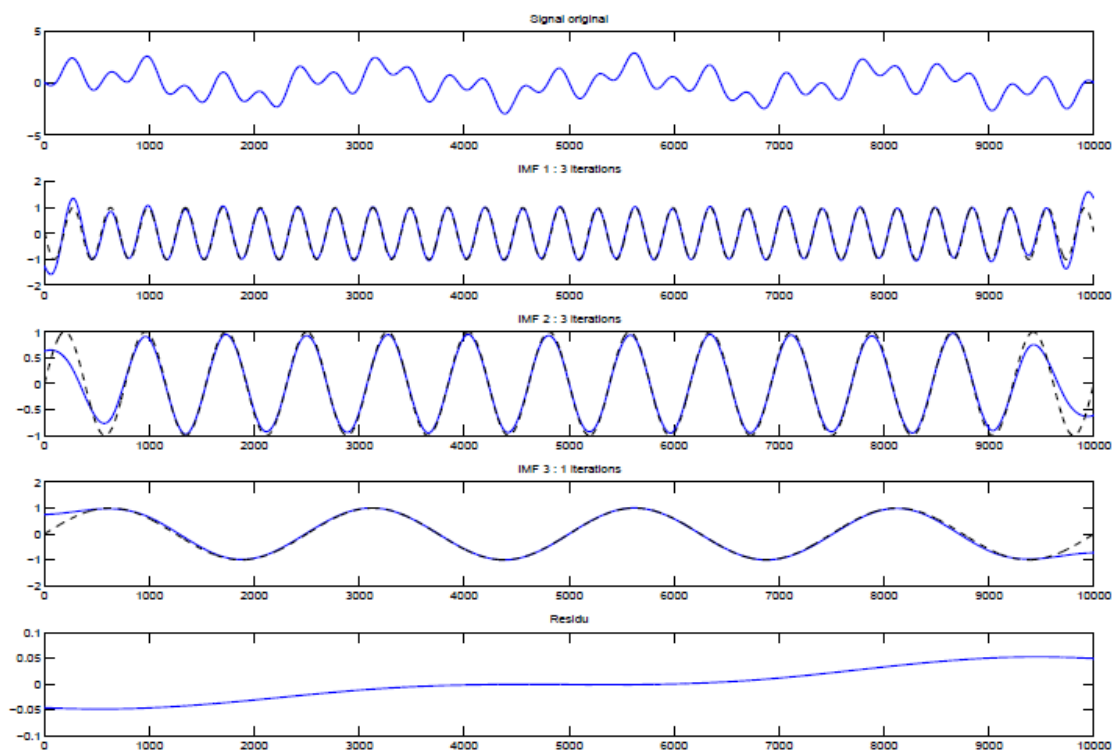


**FIGURE 4.3** — *Signal – test<sub>2</sub>* : mélange de sinusoïdes modulées AM/FM. En haut : le signal, représentation temporelle et dans le plan *temps/fréquence*. En bas : ses trois composantes.

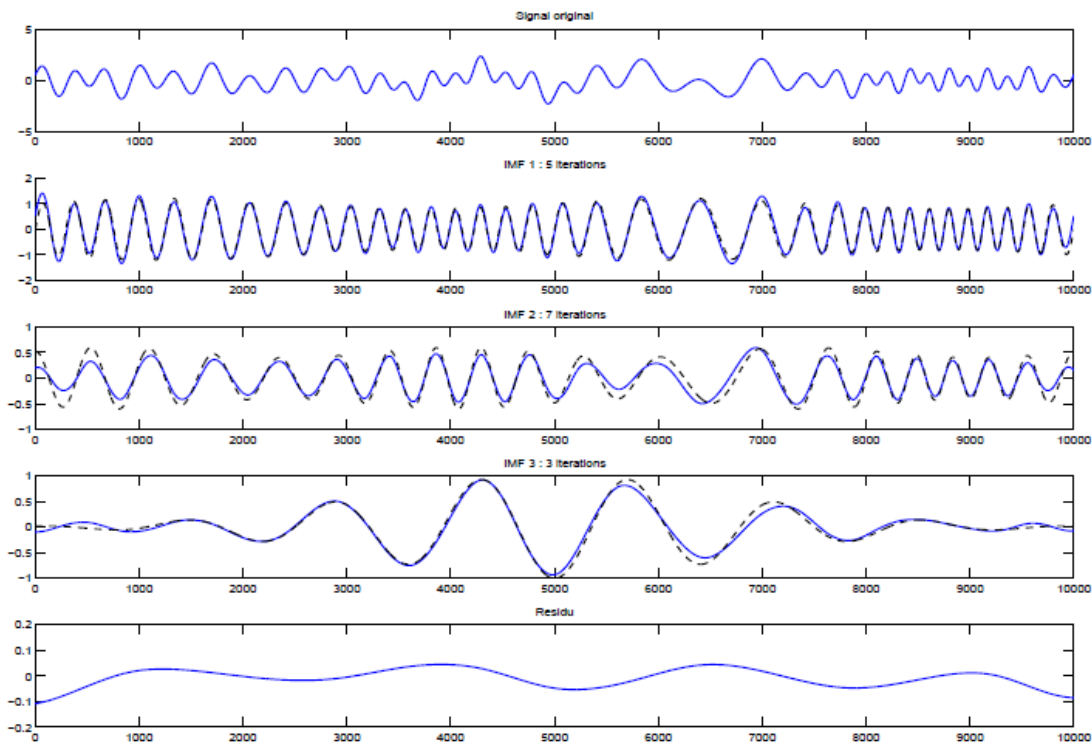
Pour chacun de ces signaux, on connaît la composante de plus haute fréquence : nous allons l'appeler dans la suite la *composante réelle* de la décomposition : c'est l'*IMF* que nous souhaitons obtenir par la décomposition *EMD*. On réalise ici une analyse qualitative : pour chaque signal test, nous donnons sa décomposition *EMD* et nous comparons chaque *IMF* à la *composante réelle* connue *a priori*. Nous donnerons également le nombre d'itérations du *SP* réalisées pour chaque mode. Nous vérifions facilement que les résultats correspondent aux composantes réelles, avec toutefois un décalage non négligeable, sur certains exemples.



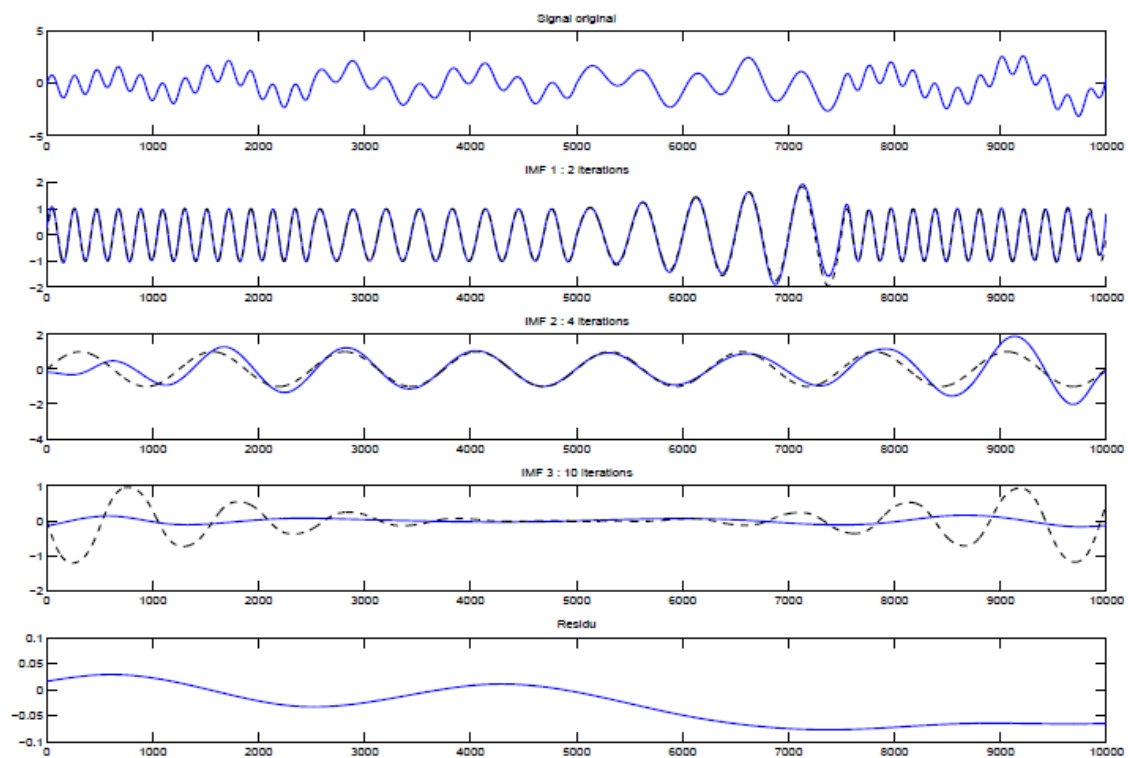
**FIGURE 4.4** — *Signal – test<sub>3</sub>* : mélange de sinusoïdes modulées avec des sauts d’amplitude et de fréquence. En haut : le signal. En bas : ses trois composantes.



**FIGURE 4.5** — Résultat de l’EMD sur le *signal – test<sub>1</sub>*. Pour chaque *IMF*, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).



**FIGURE 4.6** – Résultat de l'EMD sur le *signal – test<sub>2</sub>*. Pour chaque *IMF*, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).



**FIGURE 4.7** – Résultat de l'EMD sur le *signal - test<sub>3</sub>*. Pour chaque *IMF*, on donne le résultat obtenu (trait plein, en bleu) et le résultat attendu (trait pointillé, noir).

### 4.2.5 Prise en charge des effets de bord

Comme dans beaucoup de techniques d'analyse ou d'approximation des signaux, il se pose le problème de la gestion des effets de bords. Pour l'*EMD*, ce problème concerne l'interpolation des extrema : ainsi, la spline interpolant les minima n'est définie qu'à partir du premier minimum du signal, et jusqu'au dernier. Or on a besoin de la calculer sur tout le signal. De plus, il faut éviter la création d'artefacts, car l'itération du Sifting Process pourra les aggraver et les propager : le problème localisé aux bords deviendra global. Plusieurs techniques de prolongement ont été envisagées, dont *Rilling* a fait une étude assez exhaustive dans sa thèse [Ril07]. Parmi les nombreuses approches, il distingue les techniques utilisant une fonction fenêtre, celles consistant à prolonger le signal, et celles prolongeant uniquement les extrema. La technique préconisée est un prolongement par *symétrie miroir* des extrema : au lieu de travailler sur le signal - *on n'en a pas besoin* -, il suffit de prolonger quelques extrema en effectuant une symétrie miroir par rapport au dernier : c'est plus simple, et cela permet de gérer les cas particuliers. Cependant, même avec un bon prolongement, on peut créer des effets de bord. Ce phénomène est par exemple visible sur la figure 4.5. Dans cet exemple, le nombre d'itérations du *SP* est faible, les effets de bord ne se propagent donc pas à tout le signal.

Une autre technique consiste à considérer les bords comme des min et des max simultanément. Cela permet d'imposer à l'enveloppe moyenne de passer forcément par ces points aux bords, ce qui fait que ces effets de bords seront plus ou moins négligeables d'où la propagation sera moindre.

### 4.2.6 Critères d'arrêt

Nous avons vu qu'un *IMF* est une fonction oscillante de *moyenne locale nulle* presque partout. En fait, pour l'*EMD* et l'application de la transformée de Hilbert, si la condition les maxima sont positifs et les minima négatifs est fondamentale, la condition de symétrie des enveloppes - *c'est-à-dire de moyenne locale nulle* - n'a pas besoin d'être respectée strictement. D'ailleurs, *Sharpley et Vatchev* remarquent dans [SV06] que les modes que l'on souhaite obtenir, c'est-à-dire des composantes *AM-FM*, ne vérifient pas strictement la condition de symétrie des enveloppes. Algorithmiquement, cela revient à fixer un critère d'arrêt pour le procédé de tamisage (*SP*). Dans la suite, on notera  $h_1, \dots, h_k, \dots, h_K$  les *IMFs* de  $s$ . Pour tout  $k$ , on note  $h_i^k$  le résultat de la  $i^{me}$  itération du *SP* lors du calcul de  $h_k$ . Le critère proposé à l'origine [HSLa98] consiste à mesurer l'écart entre  $h_{i-1}^k$  et  $h_i^k$ , au moyen de la valeur :

$$SD_k = \frac{\sum_{i=0}^T |h_k^i(t) - h_k^{i-1}(t)|^2}{\sum_{i=0}^T |h_k^{i-1}(t)|^2} \quad (4.6)$$

Lorsque  $h_i^k$  oscille bien autour de 0 et a un  $SD$  très faible, on est proche de la convergence donc on peut s'arrêter. Même si ce critère fonctionne bien en pratique, ce n'est pas le plus pertinent :

- On teste avec un critère de type *Cauchy* si l'on est proche de la convergence, mais on ne vérifie pas directement que  $h_i^k$  satisfait les conditions d'un *IMF*.
- Ce critère est une mesure globale, qui évalue l'évolution en norme  $L_2$ . Cependant, on peut avoir des différences significatives sur un intervalle petit, qui rendent  $SD$  grand alors que l'on aimerait s'arrêter.

Il paraît alors judicieux de choisir un critère local, contrôlant directement les propriétés de l'*IMF*, muni d'une tolérance sur des intervalles de mesure petite. Le critère suivant, proposé dans [RFG03], propose d'arrêter le processus de sifting dès que :

- Les minima sont strictement négatifs et les maxima strictement positifs.
- Les enveloppes courantes  $E_{sup}(t)$  et  $E_{inf}(t)$  vérifient, sur un ensemble de mesure supérieure à  $(1 - \alpha)T$  :

$$|E_{sup}(t) + E_{inf}(t)| \leq \epsilon |E_{sup}(t) - E_{inf}(t)|$$

- Ces mêmes enveloppes vérifient, sur toute la durée du signal  $[0, T]$  :

$$|E_{sup}(t) + E_{inf}(t)| \leq \epsilon_2 |E_{sup}(t) - E_{inf}(t)|$$

## 4.3 Propriétés fondamentales de l'EMD

Le *sifting process*, apparemment simple et intuitif, se révèle difficile à étudier mathématiquement. Ainsi, aucune propriété importante de l'EMD n'a été démontrée. Pourtant, certaines propriétés empiriques importantes font consensus. Nous allons ici en présenter quelques unes.

### 4.3.1 Non-linéarité

L'algorithme de l'EMD est globalement non linéaire. En effet, l'EMD d'une somme de deux signaux est en général différente de la somme des EMD des signaux séparés : le nombre d'*IMF* de la somme n'est pas contrôlé par les nombres d'*IMFs* des signaux séparés, un *IMF* de la somme n'est pas généralement descriptible en termes de somme d'un ensemble quelconque d'*IMFs* des signaux séparés ni même une combinaison linéaire.

### 4.3.2 Pseudo-orthogonalité

Selon [HSLa98], un certain type d'orthogonalité est approximativement atteint expérimentalement. La comparaison effectuée est globale à l'ensemble des modes et [HSLa98] introduit un indice d'orthogonalité  $IO$ , de l'ordre de  $10^{-3}$  pour les signaux étudiés, où  $IO$  est défini par :

$$IO = \int \frac{1}{X^2(t)} \left[ \sum_{i < j} d_i(t)d_j(t) + \sum_i d_i(t)m_k(t) \right] \quad (4.7)$$

Cependant, on recherche ici une monotonie dans le comportement de l'énergie, et on veut donc une orthogonalité des modes et de la tendance dans leur ensemble. De plus, plutôt que de regarder exactement le produit scalaire  $\langle d_i | d_j \rangle$ , ou  $\langle d_i | m_k \rangle$ , dont l'ordre de grandeur dépend de l'échelle choisie pour l'échantillon, on peut s'intéresser à l'angle géométrique  $\theta$  entre  $d_i$  et  $d_j$ , défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{\langle d_i | d_j \rangle}{\|d_i\| \times \|d_j\|}.$$

### 4.3.3 Localité

Dans le cadre de l'*EMD*, l'échelle locale est définie par les extrema. Pour s'en convaincre, il suffit de rappeler que la moyenne locale est définie à partir des enveloppes du signal qui interpolent les *maxima* et les *minima*. La notion d'enveloppe étant intrinsèquement locale, on en déduit que la valeur, par exemple de l'enveloppe supérieure, en un point donné dépend essentiellement des deux maxima qui entourent ce point et dans une moindre mesure des autres maxima plus éloignés. Par conséquent, on peut considérer que les enveloppes, et donc la moyenne locale, sont définies localement à l'échelle correspondant à l'espacement entre les *maxima/minima*.

### 4.3.4 Aspect multirésolution

L'*EMD* réalise une décomposition multi-échelles, ou multirésolution, dans la mesure où elle explore successivement les échelles du signal de la plus fine, représentée par le premier *IMF*, à la plus grossière, représentée par le dernier *IMF* ou le *résidu*.

Par rapport à d'autres méthodes d'analyse multirésolution, telle que la transformée en ondelettes, l'*EMD* présente un certain nombre de particularités. Tout d'abord, à l'instar de la transformée en ondelettes discrète, elle propose une décomposition en échelles discrètes dans la mesure où la décomposition est constituée d'un nombre fini de composantes.

### 4.3.5 Auto-adaptativité

l'*EMD* fournit une décomposition *auto-adaptative* contrairement à la transformée en ondelettes pour laquelle on est obligé de choisir une ondelette mère adéquate selon la nature ou la classe du signal à décomposer. L'avantage de l'*EMD* réside dans le fait que la décomposition ne dépend que des points caractéristiques qui sont des données intrinsèque au signal à décomposer en l'occurrence les maxima, minima ou points d'inflexion.

## 4.4 Analyse Spectrale de Hilbert

L'analyse spectrale de Hilbert fournit une méthode pour l'examen de la fréquence instantanée  $f_k(t)$  et de l'amplitude instantanée  $a_k(t)$  en fonction du temps. La transformée de Hilbert (*TH*) est appliquée sur chacune des  $N$  *IMFs*  $c_k(t)$  séparément. Ensuite, il est possible d'obtenir :

$$a_k(t) = \sqrt{c_k^2(t) + \hat{c}_k^2(t)} \quad (4.8)$$

et

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \left\{ \arctan \left[ -\frac{\hat{c}_k(t)}{c_k(t)} \right] \right\} \quad (4.9)$$

où  $\hat{c}_k(t)$  est la *TH* de  $c_k(t)$ , pour  $k \in [1, N]$ . Donc, le signal analytique  $z_{x(t)}(t)$  associé à  $x(t)$  peut être exprimé comme

$$z_{x(t)}(t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \exp(j\Phi_k(t)) \quad (4.10)$$

où  $\Phi_k(t)$  est la phase du signal analytique. La fréquence instantanée s'écrit

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_k(t)}{dt} \quad (4.11)$$

Le signal original peut alors s'exprimer par

$$x(t) = \Re \sum_{k=1}^N a_k(t) \exp(j2\pi f_k(t)t) \quad (4.12)$$



On remarque ici l'absence du résidu  $r_n$ . En effet, compte tenu de sa longue oscillation, et à cause de l'intérêt porté à l'information contenue dans les autres composantes - *plus énergétiques* -, le résidu, qui est aussi la dernière composante *non-IMF*, n'est pas pris en considération [HS05].

## 4.5 Différentes variantes de l'EMD

### 4.5.1 EMD B-spline

Dans l'algorithme 1, l'interpolation des extrema est réalisée à l'aide de splines cubiques. Dans l'article [CHRX06], *Chen et al.* ont proposé une autre méthode d'interpolation qui se base sur les B-splines. Sans rentrer dans les détails, les B-splines sont une généralisation des courbes de Bézier. Elles peuvent être à leur tour généralisées par les *NURBS* - *pour Non-Uniform Rational Basis Splines* -. Ce sont des combinaisons linéaires positives de fonctions polynomiales pondérées par les points à interpoler. Le degré de la B-spline doit être fixé à l'avance. Elles ont en effet l'avantage de s'écrire et se manipuler facilement. De plus, elles possèdent plusieurs bonnes propriétés, qui conviennent bien aux résultats attendus. Enfin, dans [CHRX06], *Chen et al.* ont montré que les B-splines offrent de bonnes propriétés pour la transformée de Hilbert.

**Définition 4.5.1** La *j<sup>ime</sup> B-spline* d'ordre  $k$  d'une séquence  $\tau_j$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  est définie par la différence divisée d'ordre  $k$ ,  $[\tau_j, \dots, \tau_{j+k}]$ , aux  $k + 1$  points  $\tau_j, \dots, \tau_{j+k}$ , appliquée à la puissance tronquée comme une fonction de  $x$

**Définition 4.5.2** On appelle *B-spline périodique* de degré  $n$  sur la subdivision  $\tau$  toute combinaison linéaire des  $B_{j,\tau}^n$

**Propriétés :** Les B-splines vérifient les propriétés classiques suivantes :

- La famille  $(B_1^n, \dots, B_N^n)$  est une base de l'espace des splines périodiques de degré  $n$  sur la subdivision  $\tau$ .
- Chaque spline  $B_j^n$  est un polynôme par morceaux de degré  $n$ , de classe  $C^{n-1}$ , positive et nulle en dehors de l'intervalle  $[\tau_j, \tau_{j+n+1}]$ .
- famille  $(B_j^n)$  forme une partition de l'unité sur  $[0, 1]$  :

$$\forall t \in [0, 1], \sum_{j=1}^N B_j^n(t) = 1. \quad (4.13)$$

- La dérivée de  $B_j^n$  vérifie la relation de récurrence suivante :

$$\frac{d}{dt} B_j^n(t) = \frac{n}{\tau_{j+n} - \tau_j} B_j^{n-1} - \frac{n}{\tau_{j+n+1} - \tau_{j+1}} B_j^{n-1} \quad (4.14)$$

### 4.5.2 EMD locale

Dans la mise en œuvre de l'EMD classique, le processus de tamisage est appliqué sur toute la longueur du signal, et il est réitéré tant qu'il existe une zone locale où la moyenne des enveloppes n'est pas considérée comme suffisamment petite. Cependant, le fait de trop itérer sur la totalité du signal pour avoir une meilleure approximation locale présente l'inconvénient de contaminer d'autres parties du signal, et les modes adjacents. Pour apporter une solution à un tel problème, *Rilling et al.* ont introduit dans [RFG03] une variante de l'algorithme EMD où le tamisage est appliqué seulement là où il y en a besoin. Cette variante est liée à la méthode de détermination des nombres d'itérations *locales*. Le principe est en quelque sorte une mesure locale de la qualité d'un IMF, c'est-à-dire une fonction binaire qui en chaque instant détermine si le signal en cours de traitement est localement un IMF ou non. Cette fonction est de la forme :

$$s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left| \frac{E_{max}(t) + E_{min}(t)}{E_{max}(t) - E_{min}(t)} \right| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \left| \frac{E_{max}(t) + E_{min}(t)}{E_{max}(t) - E_{min}(t)} \right| \geq \epsilon \end{cases} \quad (4.15)$$

où  $E_{max}(t)$  et  $E_{min}(t)$  désignent respectivement les enveloppes supérieure et inférieure du signal et  $\epsilon$  est un paramètre fixé par l'utilisateur. De là, l'algorithme de l'EMD locale est alors le même que celui de l'EMD originale avec un opérateur de tamisage modifié (voir algorithme 2).

---

**Algorithm 2 : OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL**


---

- 1: **Extraire les maxima et les minima** de  $x(t)$  :  $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}, \{t_i^{min}, x_i^{min}\}$ .
  - 2: **Interpoler les ensembles de maxima**  $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}$  et les ensembles de minima  $\{t_i^{min}, x_i^{min}\}$  pour obtenir les enveloppes supérieure et inférieure :  $e_{max}(t)$  et  $e_{min}(t)$ .
  - 3: **Calculer la moyenne des enveloppes**  $m(t) = (e_{max}(t) + e_{min}(t))/2$ .
  - 4: **Calculer la fonction d'évaluation**  $s(t)$  (4.15).
  - 5: **Créer une fonction positive**  $f(t)$  qui vaut 1 là où  $s(t)$  vaut 1 et qui descend doucement vers zéro autour.
  - 6: **Soustraire la moyenne** multipliée par  $f(t)$  au signal :
  - 7:  $S^{local}[x](t) = x(t) - m(t)f(t)$ .
-

### 4.5.3 EMD en ligne

*Rilling et al.* ont proposé dans [RFG03] une seconde variante de l'EMD basée sur l'observation que l'étape de tamisage repose sur l'interpolation des extrema, et donc ne nécessite qu'un nombre fini d'entre eux - 5 minima et maxima 5 dans le cas des splines cubiques - pour être exploité à un moment donné. Ceci suggère que l'extraction d'un mode pourrait donc être possible par blocs, sans une connaissance nécessaire sur la totalité du signal. Cette remarque a ouvert la voie au développement d'un algorithme EMD qui fonctionne en ligne et peut donc être appliqué aux flux de données (voir algorithme 3).

---

**Algorithm 3** : OPÉRATEUR DE TAMISAGE LOCAL EN LIGNE
 

---

- 1: Extraire les maxima et les minima de  $x(t)$  :  $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}, \{t_i^{min}, x_i^{min}\}$ .
  - 2: Interpoler les ensembles de maxima  $\{t_i^{max}, x_i^{max}\}$  et les ensembles de minima  $\{t_i^{min}, x_i^{min}\}$  pour obtenir les enveloppes supérieure et inférieure :  $e_{max}(t)$  et  $e_{min}(t)$ .
  - 3: Calculer la moyenne des enveloppes  $m(t) = (e_{max}(t) + e_{min}(t))/2$ .
  - 4: Calculer la fonction d'évaluation  $s(t)$  (4.15).
  - 5: Créer une fonction positive  $f_2(t)$  qui vaut 1 là où  $s(t)$  vaut 1 et qui descend doucement vers zéro autour.
  - 6: **Multiplier par une fenêtre glissante  $w(t)$  qui parcourt la durée du signal :**  
 $f_2(t) = f(t)w(t)$ .
  - 7: Soustraire la moyenne **multipliée par  $f_2(t)$**  au signal :
  - 8:  $S^{online}[x](t) = x(t) - m(t)f_2(t)$ .
- 

### 4.5.4 Ensemble EMD

En 2009, *Wu et Huang* ont présenté dans [WH09] une nouvelle version de l'EMD nommée *Ensemble Empirical Mode Decomposition (EEMD)*. Cette nouvelle approche est une version de l'EMD assistée par addition de bruit blanc. Il a été développé pour résoudre le problème du mélange de mode qui peut se produire avec EMD classique. Le principe de l'EEMD est décrit comme suit : Etant donné un signal  $x(t)$ ,

1. Générer  $N$  réalisations  $n_i(t)$ ,  $1 \leq i \leq N$  de bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$
2. Calculer  $N$  jeux d'IMFs  $d_k^{(i)}(t)$   $1 \leq i \leq N$  à partir des  $N$  signaux  $x(t) + n_i(t)$
3. les IMFs EEMD sont alors les moyennes de l'ensemble des IMFs précédents.

$$d_k^{EEMD}(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_k^{(i)} + r \quad (4.16)$$

## 4.6 Quelques extensions de l'EMD

### 4.6.1 EMD pour les signaux à valeurs complexes

La première extension de l'EMD à valeurs complexes a été proposée par *Tanaka et Mandic* en 2006 [TM07], en utilisant le concept de signal analytique et par la suite appliqué la norme EMD à analyser des données complexes/bivariées. Cependant, cette méthode ne garantit pas un nombre équivalent d'IMFs réels et imaginaires, ce qui limite ses applications. Une extension de EMD qui fonctionne entièrement dans le domaine complexe, dite *rotation invariant EMD* (RI-EMD) a d'abord été proposé par *Altaf et al.* 2007 [AGTM07]. Les extrema d'un signal complexe/bivarié choisis sont les points où l'angle de la dérivée du signal complexe est nulle, ceci est basé sur la variation de la phase du signal. L'algorithme RI-EMD utilise efficacement les extrema de la partie imaginaire du signal complexe, ce qui entraîne l'obtention des enveloppes sur la base de la projection sur seulement deux directions. Un algorithme qui donne des valeurs plus précises de la moyenne locale est le *bivariate EMD* (B-EMD) introduit par *Rilling et al.* en 2007, [RFGL07] où les enveloppes correspondant aux multiples directions dans le plan complexe sont générées, puis moyennées pour obtenir la moyenne locale. L'ensemble des vecteurs de direction pour les projections sont choisis en des points équidistants le long du cercle unité. La RI-EMD et les algorithmes B-EMD sont équivalentes pour  $k = 4$  vecteurs de direction.

### 4.6.2 EMD pour les signaux à $n$ composantes

En général, pour les signaux multivariés, les maxima et minima locaux ne peuvent pas être définis directement. En outre, la notion de *modes oscillatoires* définissant un IMF est plutôt source de confusion pour les signaux multivariés. Pour pallier ces problèmes, la version *EMD multivariée* (M-EMD) qui génère plusieurs enveloppes à  $n$  dimensions en prenant la projection du signal le long des différentes directions dans l'espace à  $n$  dimensions a été proposée dans [RM10], ces projections sont ensuite moyennées pour obtenir la moyenne locale. Le choix des vecteurs de direction pour les projections peut être basé sur le système de coordonnées polaires et sphériques pour *deux variables* et pour l'EMD *trivarié* respectivement. Cependant, pour le M-EMD, les séquences de *quasi Monte Carlo à faible divergence* sont utilisées afin de fournir un meilleur échantillonnage *n-sphérique*. Une fois le signal moyen est défini, le reste de la procédure est assez similaire à l'EMD classique résumée dans l'algorithme 1. Considérons une séquence de vecteurs à  $N$  dimensions  $\{v(t)_{t=1}^T\} = \{v_1(t), v_2(t), \dots, v_N(t)\}$  qui représente un signal à plusieurs variables avec  $N$  le nombre de composantes, et  $x^{\theta_k} = \{x_1^k, x_2^k, \dots, x_N^k\}$  désignant un ensemble de vecteurs

de directions choisies données par les angles  $\theta^k = \{\theta_1^k, \theta_2^k, \dots, \theta_N^k\}$  sur une  $(n-1)$ -sphère. L'algorithme *EMD multivariée* proposé est décrit dans l'algorithme 4.

---

**Algorithm 4** : MULTIVARIATE EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION ALGORITHM
 

---

- 1: Choisir un échantillonnage de points adapté pour sur une  $(n-1)$ -sphère ;
- 2: Calculer les projections  $p^{\theta_k}(t) \}_{t=1}^T$ , du signal d'entrée  $\{v(t)_{t=1}^T\}$  suivant les vecteurs de direction  $x^{\theta_k}$  ;
- 3: Trouver les instants  $\{t_i^{\theta_k}\}$  correspondant au maxima de l'ensemble des signaux projetés  $p^{\theta_k}(t) \}_{k=1}^K$  ;
- 4: Interpoler  $\left[t_i^{\theta_k}, v(t_i^{\theta_k})\right]$  pour obtenir les enveloppes multivariées  $e^{\theta_k}(t)_{k=1}^K$  ;
- 5: L'enveloppe moyenne  $m(t)$  est déterminée en moyennant les différentes d'enveloppes calculées pour les  $K$  directions choisies comme suit :

$$m(t) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K e^{\theta_k}(t) \quad (4.17)$$

- 6: Extraire le *détail*  $d(t)$  en utilisant la formule  $d(t) = x(t) - m(t)$ . Si  $d(t)$  remplit le critère d'arrêt d'un *IMF multivariée*, appliquer la procédure ci-dessus pour  $x(t) - d(t)$ , sinon appliquer la à  $d(t)$ .
- 

### 4.6.3 Approche *EDP* pour l'*EMD*

L'*EMD*, et notamment le *Sifting Process*, sont des constructions assez simples, intuitives. Mais, si elles sont aisées à mettre en place algorithmiquement, leur étude mathématique est complexe. De plus, elles comportent certains défauts, liées notamment à l'interpolation. L'absence de cadre mathématique est la grande lacune de l'*EMD* : les propriétés évoquées au paragraphe précédent n'ont aucune justification rigoureuse. Pire, il n'existe aucune garantie de la convergence de l'algorithme, même pour une classe de signaux réduite. Plusieurs approches ont été proposées pour pallier cette lacune, notamment celle basée sur les équations aux dérivées partielles, essayant d'adapter l'*EMD* à un formalisme, tout en conservant au maximum la généralité et les bonnes propriétés de la méthode. D'importants travaux ont été réalisés dans ce sens ces dernières années [DLN05, Nia07, NDL10, HAB10, NTG<sup>+</sup>12a] dans laquelle une alternative à la définition algorithmique du processus de tamisage utilisés dans la méthode empirique de la décomposition du mode de *Huang* originale (*EMD*) a été principalement proposée. Les principales améliorations apportées par ce modèle consistent à la résolution non-itérative de l'équation aux dérivées partielles pour le calcul dans le processus de tamisage, une nouvelle définition de la fonction d'arrêt, et enfin un processus de régularisation auto-

matique basée sur la théorie des problèmes inverses afin de traiter avec problème de la détection de mixage ou de mode transitoire [NDL10]. Les résultats obtenus confirment les bonnes propriétés de la version du processus de tamisage basé sur les équations aux dérivées partielles et son utilité pour la décomposition de divers types de données.

Comme proposé dans [DLN05], une forme possible pour l'équation de diffusion d'ordre quatre est :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0 \quad (4.18)$$

où  $g(x, t)$  est la fonction de diffusion dépendant à la fois de la position et du temps, et où la variable temps est artificielle, et mesure le degré de traitement (par exemple, le lissage) du signal, par opposition à un temps réel. L'équation (4.18) peut être considérée comme une équation de diffusion à long terme - *long-range diffusion LRD* - dépendant uniquement de la position de certains points fixes caractéristiques du signal à décomposer. Après dérivation, (4.18) pouvant s'écrire :

$$s_t(x, t) + \delta_x^1 (g(x) \delta_x^3 s(x, t)) = 0 \quad (4.19)$$

où l'indice  $t$  dénote la différenciation partielle par rapport à la variable  $t$  et  $\delta_x^q$  dénote la différenciation partielle d'ordre  $q$  par rapport à la variable  $x$ . Dans ce qui suit, nous utilisons la notation  $s_0(x) = s(x, t = 0)$  pour les conditions initiales et  $s_\infty(x) = s(x, t = \infty)$  pour la solution asymptotique de (4.19) dont l'existence est prouvée dans [Nia07].

Pour implémenter le processus de tamisage, les étapes suivantes sont basées sur la définition de points caractéristiques du signal. A partir de ces points caractéristiques, un système *EDP* couplé est défini pour estimer enveloppes inférieure et supérieure qui ne sont rien d'autre que les solutions asymptotiques.

Ainsi, le système *EDP* couplées, base sur l'équation (4.19) s'écrit :

$$\begin{cases} s_t^+(x, t) = -\delta_x^1 (g^+(x) \delta_x^3 s^+(x, t)) \\ s_t^-(x, t) = -\delta_x^1 (g^-(x) \delta_x^3 s^-(x, t)) \end{cases} \quad (4.20)$$

avec  $s_t^+(x, t = 0) = s_t^-(x, t = 0) = s_0$ , et  $g^\pm$  les fonctions de diffusion dépendant des dérivés du signal d'entrée  $s_0$ . Un choix raisonnable pour les fonctions de diffusion a été :

$$g^\pm(x) = \frac{1}{9} [|\text{sgn}(\delta_x^1 s_0(x))| \pm \text{sgn}(\delta_x^2 s_0(x)) + 1]^2 \quad (4.21)$$

Après la convergence du système (4.20), les solutions asymptotiques  $s_\infty^+$ , et  $s_\infty^-$ , représentent respectivement les enveloppes supérieure et inférieure du signal à décomposer. Par conséquent, l'enveloppe moyenne est obtenue comme suit :

$$s_\infty(x) = \frac{1}{2} [s_\infty^+(x) + s_\infty^-(x)] \quad (4.22)$$

Une fois l'enveloppe calculée, on la soustrait au signal pour ensuite voir si le résultat satisfait aux conditions d'un *IMF*. Sinon, le même processus est réitéré jusqu'à l'obtention d'un mode.

#### 4.6.4 A propos de l'orthogonalité pour l'*EMD*

L'orthogonalité de la décomposition *EMD* était à l'état de conjecture. Dans [DLN05, NDL10, NTG<sup>+</sup>12a], un cadre fonctionnel de calcul des enveloppes moyennes par un modèle *EDP* et une approche spectrale est introduit par *O.Niang et al.* dans l'implémentation de l'*EMD*. A partir de l'approche spectrale d'une part, une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade est faite, et d'autre part, la construction d'un dictionnaire issu de l'*EMD* à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques [NGT<sup>+</sup>11].

### 4.7 Vers l'*EMD* sans *sifting*

Comme nous l'avons vu, tout le succès de l'algorithme de la décomposition modale empirique repose principalement sur l'estimation de l'enveloppe moyenne du signal à analyser. Dans la méthode originelle, cette enveloppe moyenne est obtenue en calculant la demi-somme entre l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure qui représentent respectivement l'interpolation, des maxima et des minima du signal, généralement par spline cubique. L'opération qui consiste à extraire progressivement l'enveloppe du signal en vue d'obtenir une composante modulée en amplitude et en fréquence est appelé processus de tamisage - ou *sifting process en anglais*-. Ces composantes *AM-FM* ainsi extraites sont appelées Fonctions Modes Intrinsèques - *IMF pour Intrinsèque Mode Fonctions* -.

Elles vérifient les critères d'éligibilités suivants :

- tous les maxima sont positifs, et tous les minima négatifs - le nombre d'extrema et le nombre de passage par zéro diffèrent d'au plus 1 -.
- la moyenne locale, au sens de la définition 4.2.1, est nulle en tout point.

Dans [NTS<sup>+</sup>15], nous introduisons un nouvel opérateur permettant d'extraire directement un *IMF* sans utiliser les processus de tamisage.

#### 4.7.1 Opérateur enveloppe moyenne

Récemment, dans [NTD<sup>+</sup>13] nous avons introduit un nouvel interpolateur basé sur les équations aux dérivées partielles qui permet de calculer l'enveloppe moyenne du signal pouvant utiliser une gamme de point caractéristique plus élargie, par exemple les points de

maximum et minimum de courbure et les points d'inflexion. Les détails de la modélisation mathématique de l'interpolateur  $EDP$  sont étudiés dans le chapitre 6.

L'enveloppe supérieur  $Env_{sup}$  et l'enveloppe inférieure  $Env_{inf}$ , d'un signal donné, sont obtenues en appliquant respectivement les opérateurs  $E_{sup}$  et  $E_{inf}$  sur le signal à décomposer comme définit dans le chapitre 6.

On aura alors les relations suivantes :

$$Env_{sup} = E_{sup} * s_0^\top \quad (4.23)$$

et

$$Env_{inf} = E_{inf} * s_0^\top \quad (4.24)$$

d'où l'enveloppe moyenne

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (Env_{sup} + Env_{inf}) \quad (4.25)$$

il vient :

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} * s_0^\top + E_{inf} * s_0^\top) \quad (4.26)$$

on peut donc écrire :

$$Env_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} + E_{inf}) * s_0^\top \quad (4.27)$$

on peut alors considérer l'opérateur

$$E_{moy} = \frac{1}{2} (E_{sup} + E_{inf}) \quad (4.28)$$

qui nous permet de calculer directement l'enveloppe moyenne par la relation suivante :

$$Env_{moy} = E_{moy} * s_0^\top \quad (4.29)$$



### 4.7.2 Construction de l'opérateur d'extraction directe de modes

Vu que l'opérateur enveloppe ne dépend que de la position des points caractéristiques et que l'on constate que ces derniers ne bougent presque pas après extraction de l'enveloppe qui est après tout une composante très basse fréquence, on pourra considérer le même opérateur  $E_{moy}$  pour le calcul des enveloppes à chaque étape du *sifting process*. La figure 4.8 montre comment évolue la position des points caractéristiques durant les différentes itération pour l'obtention d'un *IMF*. Nous pouvons constater parfois l'apparition de points parasites qui est tout simplement du à certaines imperfections du schéma numérique utilisé pour l'implémentation de l'algorithme. De là, on peut construire progressivement l'opérateur qui permet d'obtenir directement un mode en se passant du processus habituel de tamisage et cela pourra nous permettre d'échapper aux problèmes numériques liés à l'implémentation. On parle alors d'*EMD sans sifting*.

On pose :

$$pIMF_1 = s_0^\top - Env_{moy} \quad (4.30)$$

le premier *proto-mode* obtenu après extraction de la première enveloppe du signal à décomposer. on peut alors écrire :

$$pIMF_1 = s_0^\top - E_{moy} * s_0^\top$$

soit :

$$pIMF_1 = (I_N - E_{moy}) * s_0^\top$$

avec  $I_N$  la matrice identité d'ordre  $N$ ,  $N$  étant la taille du signal à décomposer.

En restant toujours dans l'esprit de l'*EMD* classique, on applique d'une manière itérative le même opérateur sur les *proto-modes* afin d'obtenir à partir d'un certain rang, un mode éligible.

Ce qui permet d'écrire :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy1}) * pIMF_1$$

ou alors :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy}) * (I - E_{moy}) * s_0^\top$$

ce qui peut s'écrire :

$$pIMF_2 = (I_N - E_{moy})^2 * s_0^\top$$

et il va suivre :

$$pIMF_3 = (I_N - E_{moy})^3 * s_0^\top$$

.....

.....

.....

Et à la fin :

$$pIMF_n = (I_N - E_{moy})^n * s_0^\top$$

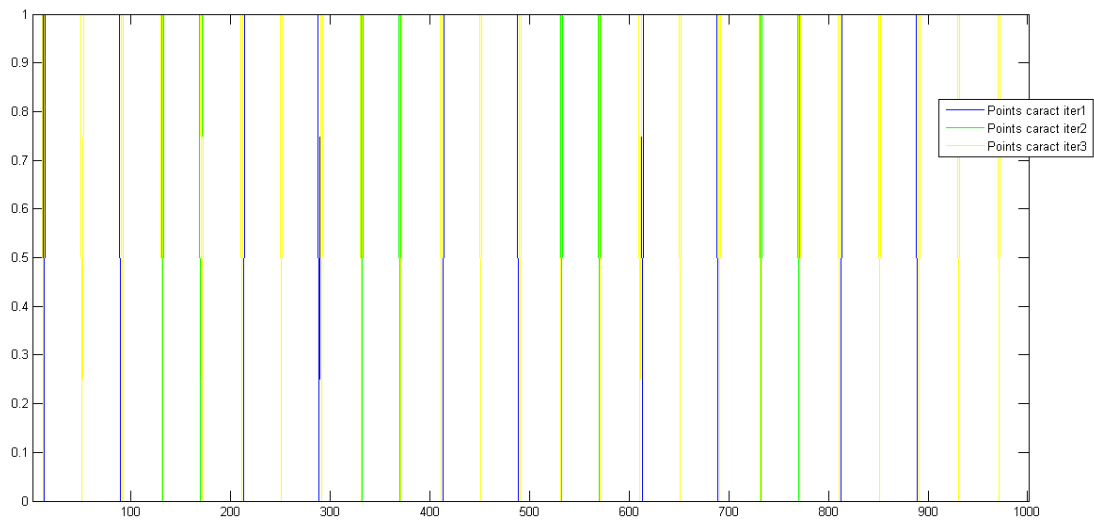
Maintenant le problème qui reste posé est la détermination du rang à partir duquel on peut extraire un *IMF*. Dans un premier temps, nous allons choisir grossièrement un rang  $n$  assez élevé qui permettra de dépasser au moins le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un *IMF*. Ce choix peut se justifier par la propriété qui veut que les *IMFs* soient de moyenne locale nulle. Par extension à la moyenne générale, nous pouvons constater que l'enveloppe moyenne d'un *IMF* est nulle, donc même si on continue à appliquer le sifting process, on restera sur la même valeur du signal. C'est alors un critère empirique de convergence. Pour la condition d'arrêt sur le résidu, on garde la même que pour l'*EMD* classique - *c'est-à-dire une valeur de standard deviation (SD) assez faible* -.

En effet, si on considère un certain rang  $N$  assez grand qui nous permet d'obtenir un mode, nous pouvons nous permettre d'écrire chaque *IMF* par la formule suivante :

$$IMF_k = (I_N - E_k)^N * s_0^\top \quad (4.31)$$

avec  $E_k$  l'opérateur enveloppe moyenne calculé pour extraire le  $k^{ime}$  *IMF*.

Nous avons testé la méthode avec comme opérateur, un polynôme de degré  $N=50$  sur des signaux maîtrisés et nous avons eu des résultats meilleures que avec la méthode *EMD* classique.



**FIGURE 4.8** — Evolution de la position des points caractéristiques durant les trois premières itérations pour obtenir le premier *IMF*.

### 4.7.3 Convergence de l'EMD sans sifting

On a :

$$(I - E)^n = [I + (-E)]^n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-E)^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{1}{k!}$$

Nous pouvons considérer alors la série entière de terme général :

$$U_k = n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{(-E)^k}{k!}$$

$$\Rightarrow U_{k+1} = n(n-1)\dots(n-k) \frac{(-E)^{k+1}}{(k+1)!}$$

d'où

$$\frac{|U_{k+1}|}{|U_k|} = \frac{n-k}{n+1} |E|$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|U_{k+1}|}{|U_k|} = |E|$$

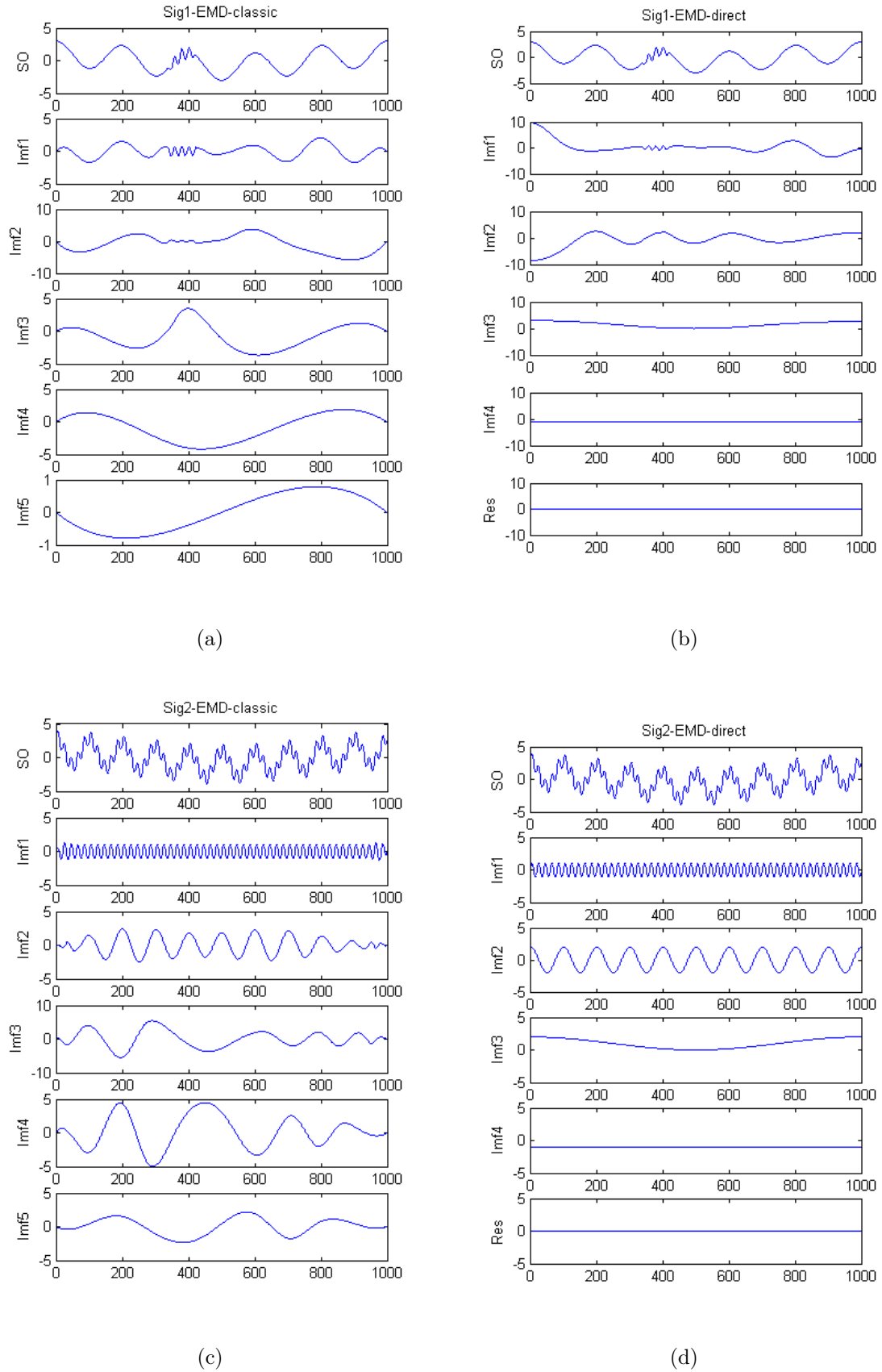
Ainsi, selon le critère d'Alembert, la série converge si  $|E| < 1$  ; or  $E$  est une matrice de valeurs propres comprise en 0 et 1 donc la série est absolument convergente et ce qui prouve la convergence de l'algorithme *EMD sans sifting*.

### 4.7.4 Quelques résultats

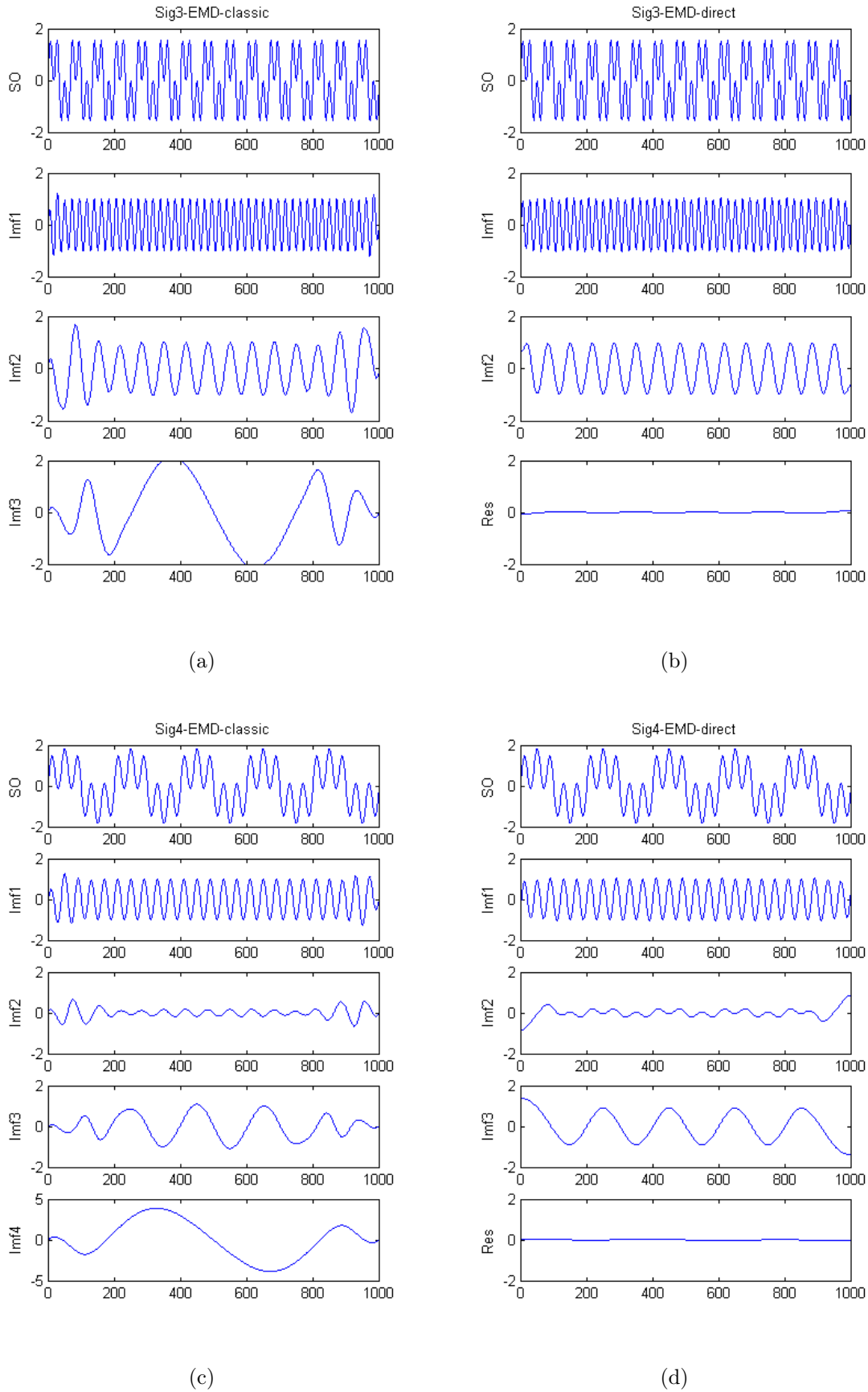
Dans les figures 4.9 et 4.10 nous faisons une comparaison entre l'*EMD classique* et l'*EMD sans sifting*. A la figure 4.9, nous représentons un signal comportant une intermittence. Nous pouvons constater que cette intermittence est totalement récupérée dès le premier mode avec la méthode *EMD sans sifting* en (b) contrairement à la méthode *EMD classique* qui permet de récupérer cette intermittence qu'en partie au premier mode en (a). En (c) et (d) nous faisons une comparaison entre la méthode *EMD classique* et la méthode *EMD sans sifting* pour un signal composé de deux éléments de fréquence. Nous voyons que la méthode *EMD sans sifting* permet de séparer assez nettement les deux composantes du signal. Dans la figure 4.10, nous avons en (a) et (b) un signal

composé de deux éléments de fréquences et d'amplitudes différentes et en (c) et (d), un signal composé de trois éléments de fréquences et d'amplitudes différentes. Dans tous ces exemples, nous avons toujours une meilleure séparation des composantes élémentaires avec la méthode *EMD sans sifting* que la méthode *EMD classique*.

Aussi, la méthode *EMD* sans sifting garde l'avantage de pouvoir obtenir un *IMF* en une seule itération alors qu'avec l'*EMD classique* il en faut parfois des centaines.



**FIGURE 4.9** —  $signal_1$  décomposé avec la méthode EMD classique en (a),  $signal_1$  décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (b),  $signal_2$  décomposé avec la méthode EMD classique en (c),  $signal_2$  décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (d).



**FIGURE 4.10** —  $signal_3$  décomposé avec la méthode EMD classique en (a),  $signal_3$  décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (b),  $signal_4$  décomposé avec la méthode EMD classique en (c),  $signal_4$  décomposé avec la méthode EMD sans sifting en (d).

	EMD classique	EMD directe
Signal1 (sinus modulé avec une intermittence)	427 itérations 5 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 4 IMF + res
Signal2 (somme de 3 fréquences avec modulation en amplitude)	599 itérations 7 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 3 IMF + res
Signal3 (somme de 2 fréquences)	273 itérations 11 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 2 IMF + res
Signal4 (somme de 3 fréquences)	225 itérations 11 IMF + résidu	1 itération (Degré polynôme 50) 3 IMF + res

FIGURE 4.11 — Tableau comparatif entre la méthode *EMD classique* et la méthode *EMD sans sifting*.



### 4.7.5 Forme analytique

$$(I - E)^N = I + \sum_{k=1}^N C_N^k (-E)^k = I + \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E^k$$

avec

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

On peut alors écrire :

$$IMF_1 = s_0^\top + \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k * s_0^\top$$

$$= \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_1^k * s_0^\top,$$

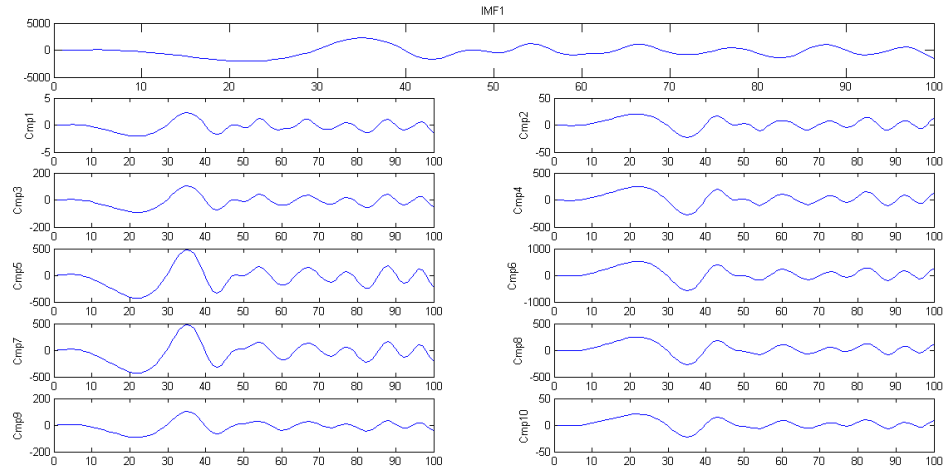
$$IMF_2 = \left[ \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_2^k \right] \left[ \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k \right] * s_0^\top,$$

$$IMF_3 = \left[ \sum_{k=0}^N (-1)^k C_N^k E_3^k \right] \left[ \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_2^k \right] \left[ \sum_{k=1}^N (-1)^k C_N^k E_1^k \right] * s_0^\top$$

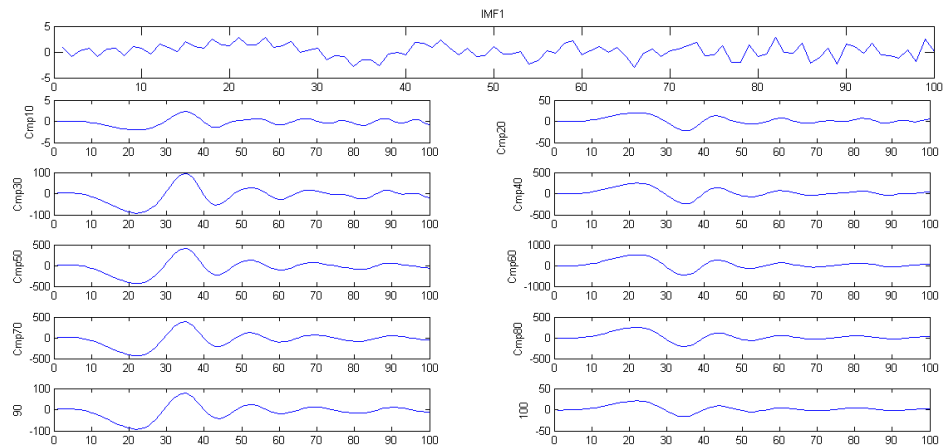
d'où on peut écrire le signal d'entrée  $s_0$  sous la forme :

$$s_0^\top = (I - E_1)^N * s_0^\top + \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} C_N^k E_1^k * s_0^\top$$

### 4.7.6 Quelques exemples



**FIGURE 4.12** – En haut, le premier *IMF* ; En suite les 10 premières composantes ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.



**FIGURE 4.13** – En haut, le premier *IMF* ; Ensuite les 100 premières composantes avec une décimation de 10 ; Soit la colonne de gauche pour les composantes négatives et la colonne de droite pour les composantes positives.

## 4.8 Conclusion

Nous avons dans ce chapitre fait une étude de la décomposition modale empirique dans ses différentes approches. Ces dernières années, différentes variantes de l'*EMD* ont vu le jour, avec le plus souvent une tentative de définir un cadre mathématique qui permet de donner une légitimité et une meilleure compréhension de la méthode *EMD*. Une analyse de l'orthogonalité de l'*EMD* est établie dans [NGT<sup>+</sup>11], d'une part à partir de l'approche spectrale et d'autre part à partir d'une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade, ainsi que la construction d'un dictionnaire issu de l'*EMD* à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques. À partir du nouvel opérateur basé sur les équations aux dérivées partielles que nous avons récemment proposé dans [NTD<sup>+</sup>13], nous avons pu construire une suite d'opérateurs qui converge à partir d'un certain rang  $N$  et permet de récupérer un *IMF* en une seule itération. On parle alors de la décomposition modale empirique sans le *sifting process*.

Chapitre

5

# Applications de la Décomposition Modale Empirique en traitement du signal et de l'image

## Sommaire

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>73</b>
<b>5.2</b>	<b>L'EMD appliqué aux images</b>	<b>74</b>
5.2.1	Extension 2D de l'approche <i>EDP</i> pour l' <i>EMD</i>	74
5.2.2	Modèle de super-diffusion dans l'espace 2D	75
5.2.3	Relation avec les équations aux dérivées partielles définies sur des surfaces implicites	75
5.2.4	Quelques applications de l'approche <i>EDP</i> pour l' <i>EMD 2D</i>	76
<b>5.3</b>	<b>EMD et applications</b>	<b>82</b>
5.3.1	Le problème du mixage de modes	82
5.3.2	Débruitage de signaux par <i>EMD</i>	82
5.3.3	La compression par <i>EMD</i>	83
5.3.4	Le tatouage d'images : approche par <i>EMD</i>	85
5.3.5	L'analyse des composantes rythmiques dans les signaux <i>EEG</i> pour les Interfaces Cerveau-Machine ( <i>ICM</i> ) - ou <i>Brain Computer Interface (BCI)</i> -	87
<b>5.4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>92</b>

## 5.1 Introduction

LA MÉTHODE *EMD* a marqué ces dernières années par le nombre croissant de ses applications en traitement du signal et de l'image. Les propriétés des modes issues

de la décomposition permettent une bonne séparation des différents atomes de fréquence qui composent le signal. Bien qu'étant introduite récemment, l'*EMD* a déjà été appliquée avec succès dans de nombreux domaines : débruitage, compression, analyse de textures, tatouage d'images, imagerie médicale... En effet, sa nature adaptative et algorithmique la rend à même de traiter des signaux non stationnaires issus de processus non linéaires, de manière simple et avec un coût algorithmique très raisonnable.

## 5.2 L'*EMD* appliqué aux images

La décomposition en ondelettes reste de nos jours très utilisée pour les applications nécessitant la séparation des composantes fréquentielles présentes dans une image. Malgré les résultats, la méthode ondelette reste toujours limitée par le fait que la base et l'échelle de décomposition sont données. Le signal résultant est alors limité sur une bande de fréquence fixe qui dépend uniquement de la fréquence d'échantillonnage et n'a aucune relation avec le signal lui-même, ce qui fait que la décomposition n'est pas adaptative. Comparée à la transformée en ondelettes, la décomposition modale empirique donne de meilleurs résultats du point de vue sélectivité et précision des données à analyser. L'*EMD* reste un outil très puissant pour l'analyse multi-résolution des signaux non stationnaires. Tous ces aspects intéressants motivent fortement une extension de l'*EMD* pour le traitement de l'image. La difficulté majeure de la décomposition modale empirique pour l'image reste la détermination des extrema *2D* - *sur une surface* - et le choix d'un interpolateur. Une fois ces paramètres déterminés, les détails de l'algorithme *EMD 2D* sont similaires au cas *1D*. De nombreux travaux ont été réalisés dans ce sens et ont permis de résoudre de nombreux défis pour la réduction de bruit, l'extraction de textures, la reconnaissance de formes ainsi que d'autres types d'application en traitement d'images.

### 5.2.1 Extension *2D* de l'approche *EDP* pour l'*EMD*

Dans [NTG<sup>+</sup>12a, Nia07], une extension *2D* de l'approche *EDP* pour l'*EMD* appliquée en traitement de l'image a été proposée. Ces travaux profitent du cadre théorique établi dans la version *1D*. Dans l'esprit du *processus de tamisage* original, cet algorithme de filtrage non linéaire est équivalent à une séquence itérative de régularisation et de reconstruction. Les résultats expérimentaux montrent que notre approche peut être utilisée pour décomposer des images avec des performances assez concurrentielles en termes de temps d'exécution, avec des algorithmes *EMD 2D* qui existent dans la littérature à l'exemple de *RBF-tools*. La principale contribution de cette approche est l'utilisation de la version *2D*

de l'interpolation *EDP* que nous nous avons présenté dans le chapitre 6 et qui fonctionne comme une méthode de lissage sélective d'image.

### 5.2.2 Modèle de super-diffusion dans l'espace 2D

On considère l'équation (4.18) avec une matrice de diffusion définie comme suit [NTG<sup>+</sup>12a] :

$$G_q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{q,1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & g_{q,2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

où  $g_{q,i}$  est la fonction d'arrêt d'ordre  $q$  suivant la direction  $i$ . L'équation de super diffusion ainsi proposée pour  $q = 2$  et avec un paramètre de tension est la suivante :

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\alpha G_1 \nabla u(\mathbf{x}, t) - (1 - \alpha) G_2 \nabla \Delta u(\mathbf{x}, t)) \quad (5.2)$$

Afin d'estimer les enveloppes supérieure et inférieure, les fonctions  $g_{q,i} \in G_q$  doivent être spécifiées. Évidemment, il y a de nombreuses façons de construire une fonction de diffusion anisotropique en 2D. Par souci de simplicité, nous testons le choix suivant, avec  $G_1 = G_2$  en se basant sur la définition (4.21) pour tout  $q = 1, 2$  :

$$g_{q,i}^{\pm}(\mathbf{x}) = \frac{1}{9} [|\text{sgn}(\delta_{x_i}^1 u_0)| \pm \text{sgn}(\delta_{x_i}^2 u_0) + 1]^2 \quad (5.3)$$

avec le signe  $\pm$  définissant respectivement l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure.

### 5.2.3 Relation avec les équations aux dérivées partielles définies sur des surfaces implicites

Nous pouvons voir le lien entre cette équation *LRD* simple avec une équation de la chaleur du second ordre sur une courbe ou une surface  $S \in R^N$  -  $N = 2$  pour une courbe et  $N = 3$  pour une surface -, qui est donnée par :

$$u_t(\mathbf{x}) = -(-1)^q \nabla_S^{2q} u(\mathbf{x}, t) \quad (5.4)$$

avec la condition initiale  $u(y, 0) = f$  pour tout  $y$  de  $S$ . Ici,  $\nabla_S^{2q} u$  est l'opérateur différentiel d'ordre  $2q$  appliqué sur  $u$  intrinsèque à la surface  $S$ . Si  $S$  est définie comme une surface implicite à partir d'une fonction de niveau  $\phi$ , - c'est-à-dire  $S$  est défini comme le niveau zéro de  $\phi$  -,  $S = \{\mathbf{x} \in R^N : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$ . Ainsi, il est facile de montrer que pour tout point

de  $S$ , l'opérateur Laplace  $\Delta_S u$  intrinsèque à  $S$  peut être calculé en utilisant des dérivés extrinsèques comme suit :

$$\Delta_S u(x) = \frac{1}{|\nabla \phi(x)|} \nabla \cdot (P(x) \nabla u(x) |\nabla \phi(x)|) \quad (5.5)$$

où  $P$  est un opérateur de projection. Si  $\phi$  est une fonction de distance signée, alors  $|\nabla \phi(x)| = 1$ , l'équation (5.5) peut être réduit en :

$$\Delta_S u(x) = \nabla \cdot (P(x) \nabla u(x) |\nabla \phi(x)|) \quad (5.6)$$

De la même manière, nous pouvons définir l'opérateur biharmonique, sur  $u$  intrinsèque à  $S$  comme suit :

$$\Delta_S^2 u(x) = \nabla \cdot (P(x) \nabla (\nabla \cdot \nabla P(x) \nabla u(x))) \quad (5.7)$$

A titre d'exemple, en considérant  $S$  la ligne faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $x_1$  dans le plan image  $x = (x_1, x_2)$ , la matrice de projection est alors définie par :

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

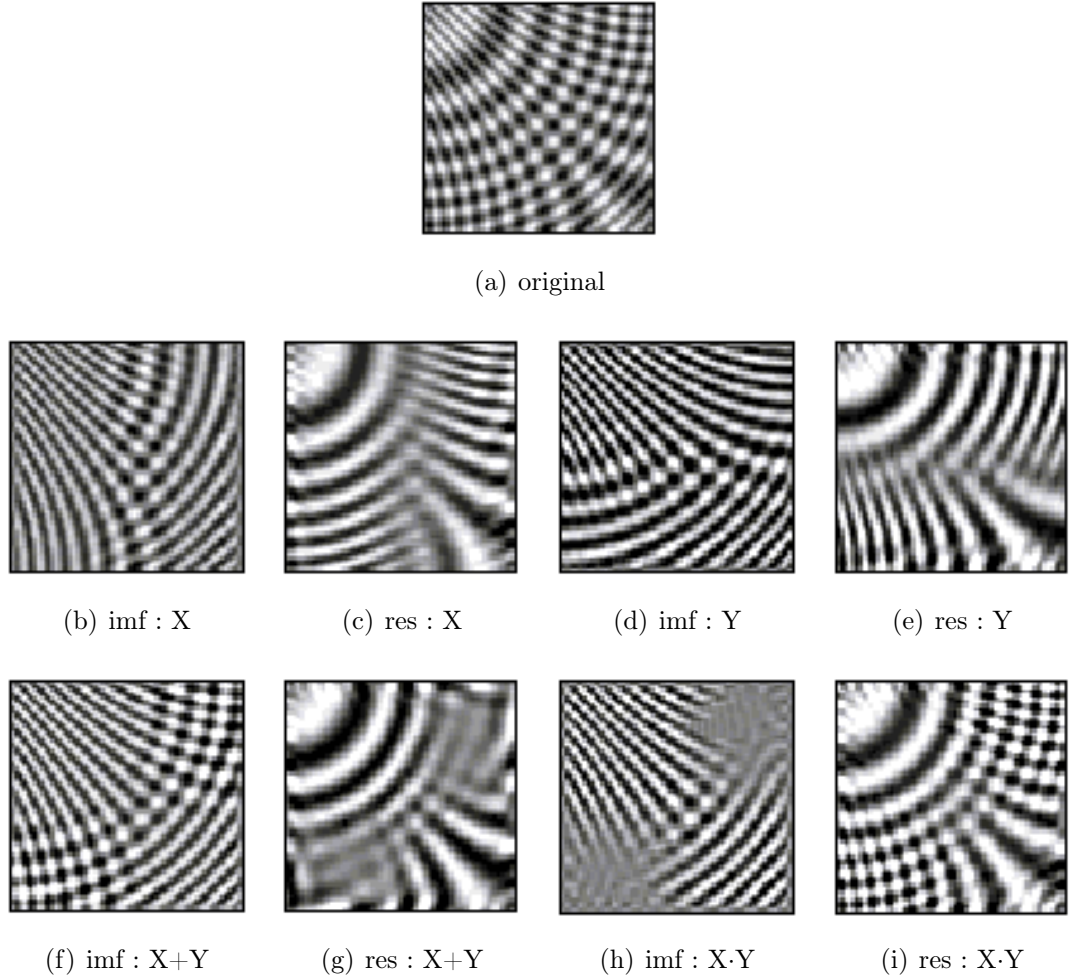
Notant que  $P$  ne dépend pas de  $x$  pour cet exemple, les équations de la chaleur du second et quatrième ordre sur  $S$ , pour  $q = 1, 2$  dans l'équation (5.4) sont données par :

$$u_t = -(-1)^q (a^q \partial_{x_1}^2 q u + 2c^q \partial_{x_1}^q \partial_{x_2}^q + b^q \partial_{x_2}^2 q) \quad (5.9)$$

#### 5.2.4 Quelques applications de l'approche *EDP* pour l'*EMD* 2D

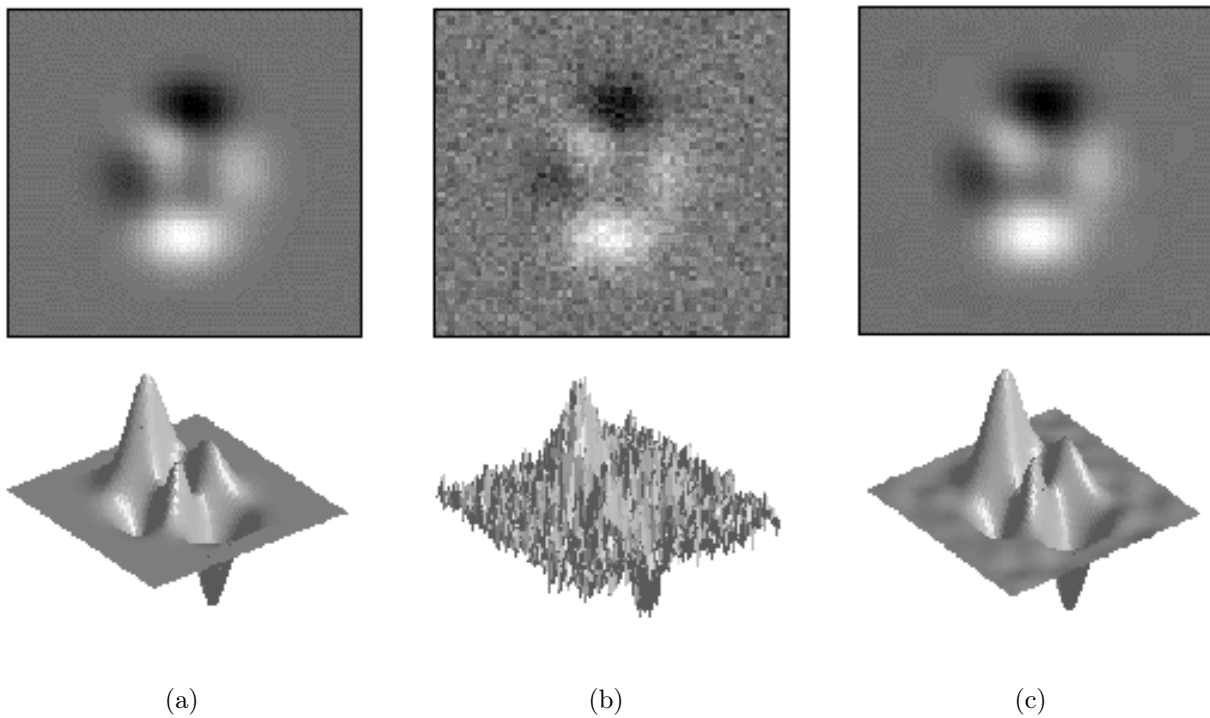
Dans cette section, nous nous intéressons à diverses applications possibles de l'*EMD* 2D, comme l'extraction de texture, le débruitage ou la retouche d'image. Particulièrement, dans les problèmes de segmentation d'image, l'extraction de texture est une étape cruciale et, est l'une des techniques les plus importantes pour l'analyse et la compréhension de l'image. L'un des aspects cruciaux de l'analyse de texture est l'extraction de caractéristiques et les propriétés texturales. L'utilisation d'opérateurs de filtre a été appliquée avec succès à une variété de problèmes de vision par ordinateur. Un ensemble d'opérateurs linéaires ou non linéaires est généralement appliquée à l'image d'entrée, qui crée un espace de données multimodale. Il ya beaucoup de travaux connexes sur le choix du filtre optimal pour l'extraction de la texture. La plupart des approches utilisent des bancs

de filtres prédéfinis, composé de filtres isotropes ou anisotropes tels que l'opérateur *gaussien*, l'opérateur de *Laplace-Gauss* [TT99], ou les opérateurs de *Gabor 2D* avec différentes échelles et orientations [Wei99, Tum03]. Une approche alternative est la transformée en ondelettes, ce qui fournit un cadre unificateur pour l'analyse et la caractérisation d'images en différentes échelles - voir par exemple [EMU96] -.

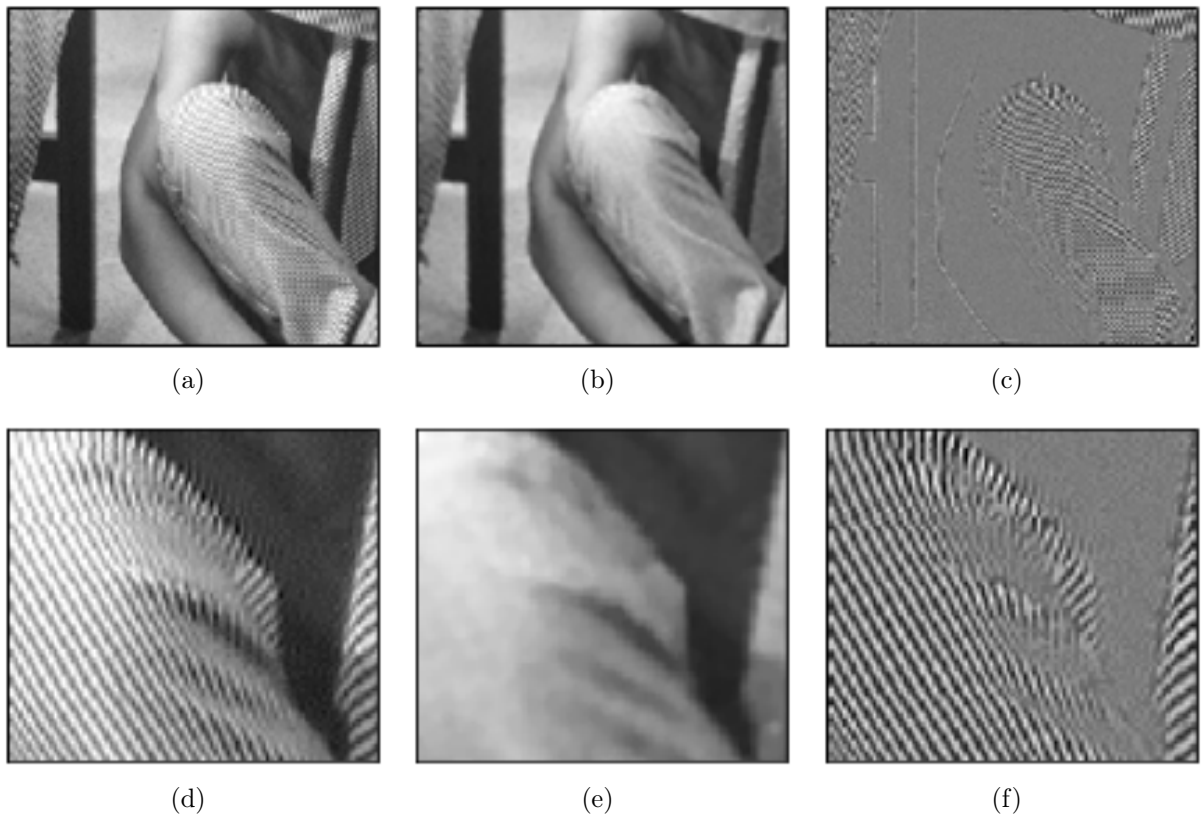


**FIGURE 5.1** – Décomposition adaptative directionnelle en éléments de fréquences locales par la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), image origine composée de plusieurs éléments de fréquence modulés. En (b) et (c), premier *IMF* et le *résidu* pour la décomposition suivant la direction ( $X$ ). En (d) et (e), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant la direction ( $Y$ ). En (f) et (g), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant les deux directions ( $X + Y$ ). En (h) et (i), premier *IMF* et *résidu* pour la décomposition suivant la ligne suivie d'une décomposition suivant les colonnes ( $X \cdot Y$ ).

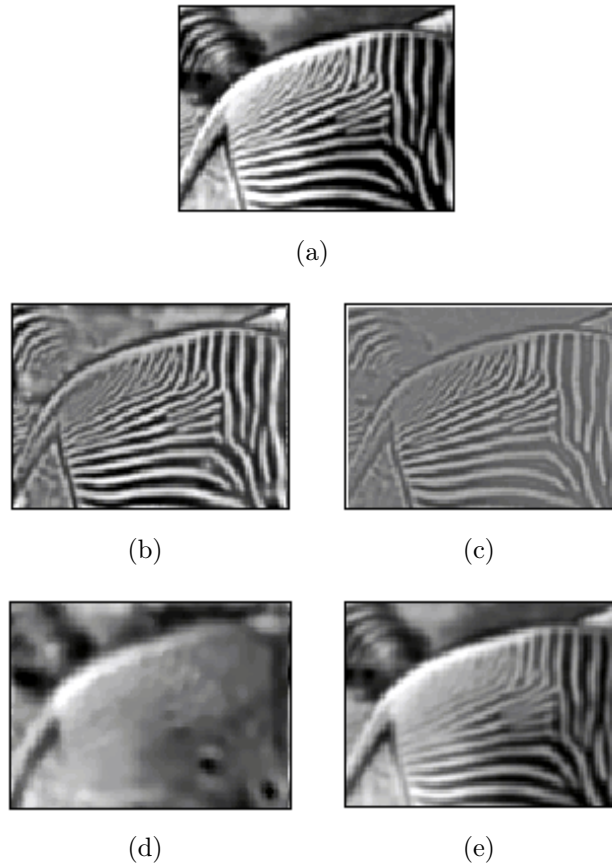




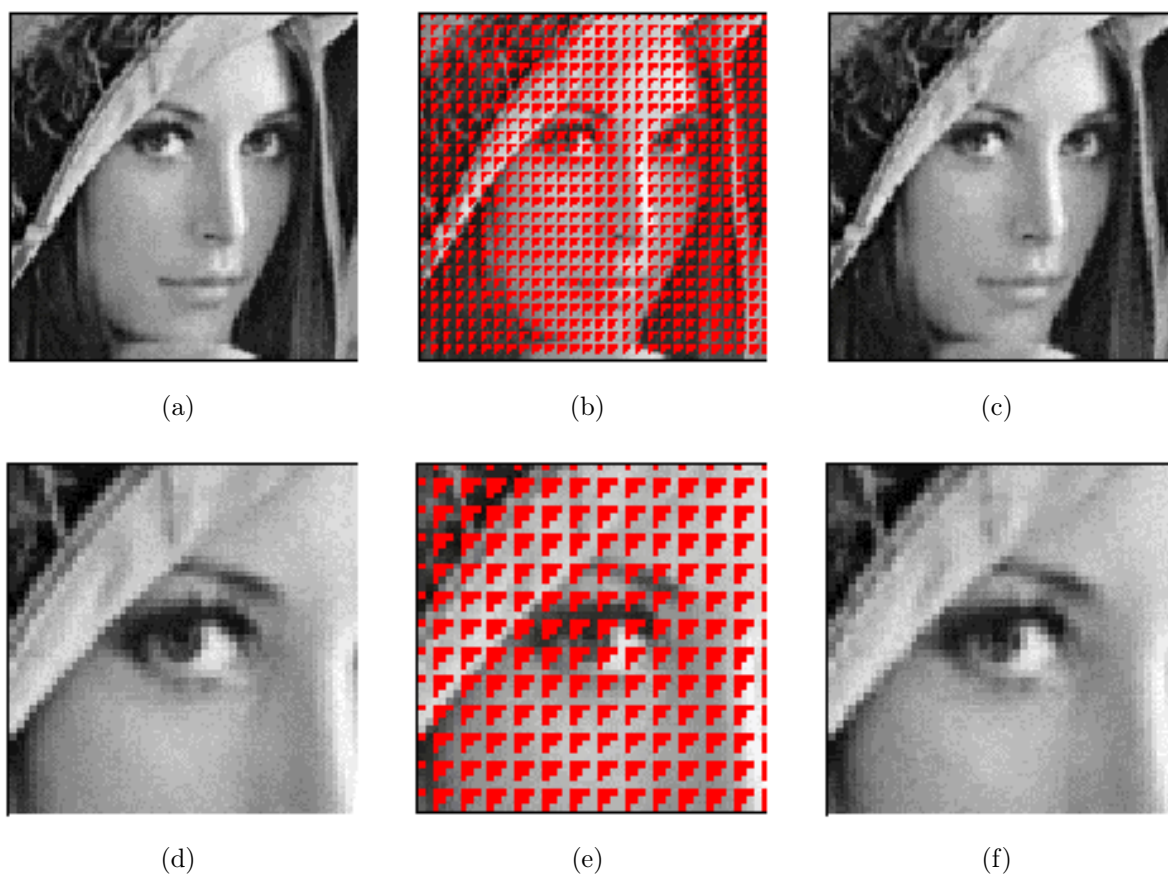
**FIGURE 5.2** — Débruitage d'images utilisant la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), l'image non bruitée, avec une représentation  $2D$  - *en haut* - et une représentation en surface - *en bas* -. En (b), mêmes représentations qu'en (a) avec l'image ajoutée d'un bruit Gaussien. En (c), l'image débruitée est donnée par le cinquième *IMF*.



**FIGURE 5.3** — Filtrage de l'image "BARBARA" par la méthode *EDP-EMD-2D*. En (a), l'image d'origine. En (b) et (c) les approximations - *résidu* - et les détails - *première IMF* - l'image. En (d), (e) et (f), zoom sur les images (a), (b) et (c).



**FIGURE 5.4** — Comparaison entre la méthode *EDP-EMD-2D* et l'approche des *Pyramides de Laplace*. En (a) l'image d'origine. En (b) et (d), le premier *IMF* et résidu de pour la méthode. En (c) et (e) premier niveau des pyramides Laplace gaussiennes. Considérant que la méthode *EDP-EMD-2D* est capable d'extraire une composante large bande *FM*, la décomposition de Laplace a échouée. Toutes les bandes de zèbre sont identifiées dans le premier *IMF* en (b), mais seules les bandes de haute fréquence sont observées en (c).



**FIGURE 5.5** — Inpainting sur l'image de "*Lena*". En (a) l'image d'origine. En (b) image dégradée. En (c) résultat après Inpainting. En (d) et (f) Zoom sur les images (a) et (c).

## 5.3 EMD et applications

### 5.3.1 Le problème du mixage de modes

La décomposition modale empirique est une méthode itérative permettant de décomposer un signal en différents *modes* - ou *IMF Intrinsic Mode Function* -. Ces modes sont sensés contenir des niveaux de fréquence présents dans le signal à décomposer ou bien tout simplement du bruit additif. Cependant un phénomène de mixage de modes peut apparaître et aboutir à une mauvaise séparation des niveaux de fréquence ou une surestimation du niveau de bruit dans le signal original. Différentes approches ont été proposées dans la littérature pour apporter une solution à cette anomalie. Dans [TMK09], Terrien *et al.* ont proposé une méthode générale de détection du mixage de modes basée sur la détection de non stationnarité sur la première *IMF*. Une fois le mixage de modes identifié, ils ont ensuite proposé de corriger l'estimation du niveau de bruit contenu sur la première *IMF* par une extraction sur cette *IMF* de la partie signal et de la partie correspondant uniquement au bruit.

Dans [Nia07], O. Niang a introduit une estimation de la valeur optimale d'un paramètre de régularisation effectuée à partir de la technique de *régularisation de Tikhonov* appliquée au *proto-mode* obtenu après la première itération du sifting process. La localisation de cette valeur optimale est obtenue par application de l'algorithme proposé dans [RT05]. Une fois que cette estimation est faite et que les modes mélangés sont séparés, le sifting process continue. Cette technique a été appliquée avec beaucoup d'efficacité pour l'extraction de signaux transitoires, la séparation temporelle d'un mélange de modes, la séparation temporelle d'un double mélange de modes, la séparation fréquentielle de mélange de modes, ainsi qu'à la décomposition d'un signal composite standard.

### 5.3.2 Débruitage de signaux par EMD

Supposons que le signal observé s'écrit sous la forme :

$$s(t) = y(t) + n(t) \quad ,$$

contenant  $y(t)$  le signal utile et  $n(t)$  un bruit additif. Certains algorithmes de débruitage de séries temporelles sont largement utilisés - *exemple les modèles basés sur la transformée en ondelettes* -, en supposant que la série soit stationnaire. Cependant, pour les séries non-linéaires et non stationnaires, les approches par les ondelettes peuvent échouer. Pour la décomposition en ondelettes de L au niveau d'un signal, le nombre des coefficients à énergie significative est faible. Ceci est une conséquence directe de la propriété d'approximation des ondelettes. Le signal peut être correctement représenté par un petit

nombre de coefficients. Le débruitage par ondelettes, développé par *Johnstone et Donoho* [Don95], est basé sur la sélection des coefficients sur lesquelles on applique un seuillage. Dans le même esprit de l'approche du shrinkage ondelettes et suivant les travaux publiés dans [FG04], où les auteurs montrent comment l'EMD révèle une structure de banc de filtres équivalente à la plupart des actions propriétés de la décomposition en ondelettes, *O. Niang* [Nia07] introduit et teste une nouvelle approche de débruitage basée sur la Décomposition Modale Empirique en utilisant la même fonction de shrinkage que l'approche par ondelette [DJ94], sur les  $k$  premier *IMFs* du signal.

$$\theta_k = \sqrt{2 \log(N)} \hat{\sigma}_k \quad (5.10)$$

avec  $N$  la taille du signal et  $\hat{\sigma}_k = 1.4826 \text{ median}(|imf_k|)$ .

### 5.3.3 La compression par EMD

La compression est un domaine du traitement du signal qui a connu des avancées fondamentales ces vingt dernières années. Le développement de la transformée en  $r$  a permis des progrès considérables, conduisant à des formats de compression des signaux et images extrêmement efficaces, tels que *MPEG* [Nol97], *JPEG* [SCE01]. Dans [Lin02, Lin05], *Linderhed* utilise la décomposition modale empirique pour définir un modèle de compression d'image. Ce modèle se base sur la quantification et le codage des extrema issus du calcul des *IMFs*. La décompression se fait en appliquant le procédé inverse : décodage des extrema, interpolation par spline pour reconstituer les *IMFs* puis on passe à la recomposition pour obtenir le signal initial. En 2009, *Khaldi et al.* développent une nouvelle technique de compression audio à bas débit, basée sur la décomposition modale empirique, en association avec un modèle d'audition - seuil de masquage - [KBTCV09, KBT<sup>+</sup>10]. Le nombre de bits alloué au codage des extrema seuillés varie d'une *IMF* à une autre et respecte la contrainte d'inaudibilité de l'erreur de quantification. Les techniques de seuillage des extrema et d'allocation des bits sur lesquelles repose le procédé de compression, garantissent un bas débit et une bonne qualité d'écoute du signal codé-décodé.

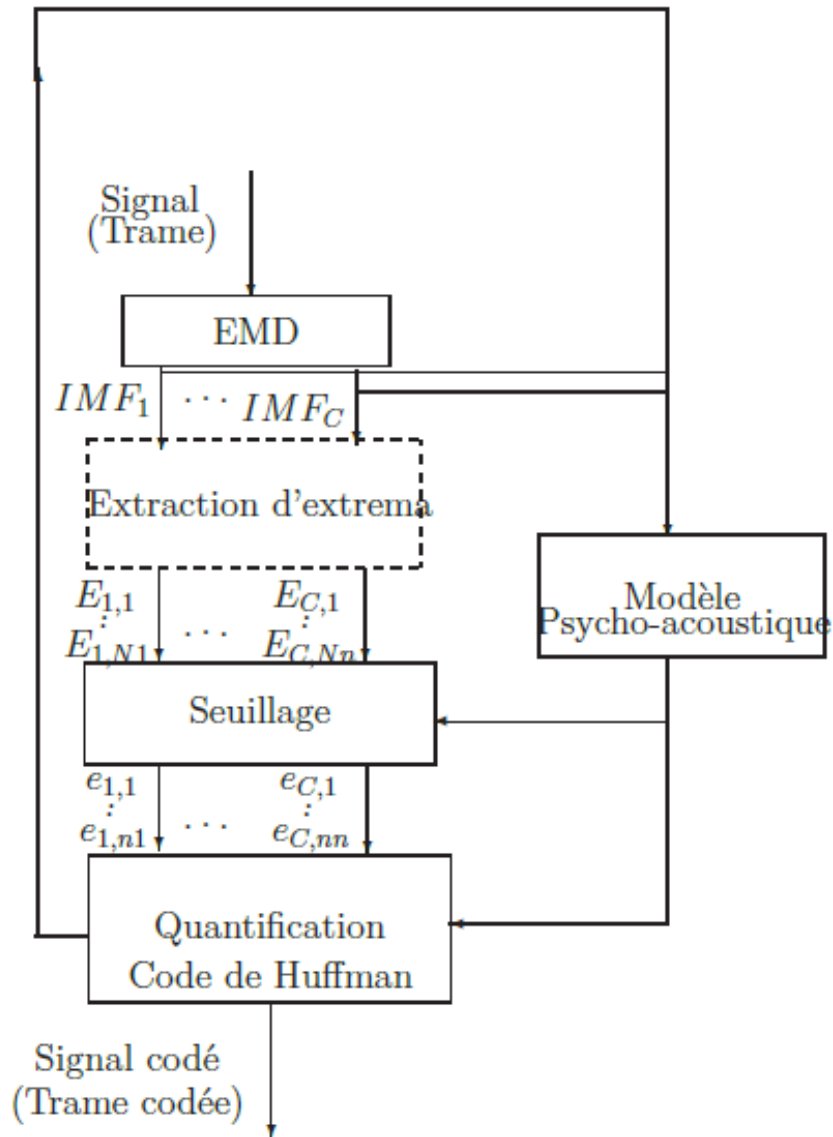


FIGURE 5.6 — Organigramme de la compression par *EMD* [KBTCV09].

### 5.3.4 Le tatouage d'images : approche par EMD

La multiplication des données numériques, et plus encore la facilité avec laquelle il est possible de les reproduire, pose la question de la protection des droits d'auteur. Deux approches sont possibles pour tenter de résoudre ce problème :

- brider l'outil qui effectue la copie ou la lecture du médium pour empêcher la reproduction : c'est le cas par exemple des lecteurs *DVD* qui nécessitent une clé pour déchiffrer le disque ;
- protéger le médium lui-même en y insérant des données qui identifient son propriétaire.

Le tatouage d'image correspond exactement à cette seconde catégorie. Le principe des techniques dites de tatouage est d'insérer une marque imperceptible dans les valeurs de la donnée. Dans le cadre de la protection des droits d'auteurs, la marque insérée, appelée *watermarque* correspond au code du copyright. Ce type de tatouage doit répondre à des contraintes fortes en termes de robustesse. En effet, quelles que soient les transformations - *licites ou illicites* - que la donnée tatouée subit, la marque doit rester présente tant que la donnée reste exploitable. De plus, la présence de la marque ne doit être détectée que par des personnes autorisées - *possédant une clef de détection privée* -. Le tatouage est aussi utilisé en médecine - *déontologie médicale* - pour préserver le secret médical ou pour la transmission des dossiers médicaux facilitant ainsi le diagnostic à distance. Le tatouage peut être utilisé comme un outil de contrôle d'intégrité des documents. Enfin, le tatouage permet la surveillance des émissions en cours de diffusion.

En résumé, l'objectif du tatouage est le suivant :

- ❶ le propriétaire d'une image originale souhaite défendre ces droits de propriétés ;
- ❷ pour ce faire, il introduit une marque - *un identifiant* - dans l'image ;
- ❸ l'image ainsi modifiée est ensuite diffusée ;
- ❹ à tout moment, le propriétaire souhaite pouvoir extraire son identifiant de l'image face à une tierce personne, et ce même si l'image marquée a été modifiée entre-temps en une image "proche".

Nous illustrons cela sur la figure 5.7 : De nos jours, de nombreux algorithmes sont largement utilisés et certains produits sont même commercialisés, dont la plupart utilisent le domaine des transformées pour une meilleure résistance à certaines attaques basées sur des transformations géométriques spatiales souvent non malveillantes. L'utilisation des ondelettes pour le tatouage est actuellement très répandue et se justifie par le fait que le domaine multirésolution est le soubassement des normes de compression et de débruitage les plus utilisées. En plus, les sous-bandes hautes fréquences - *HH, HL, LH* -



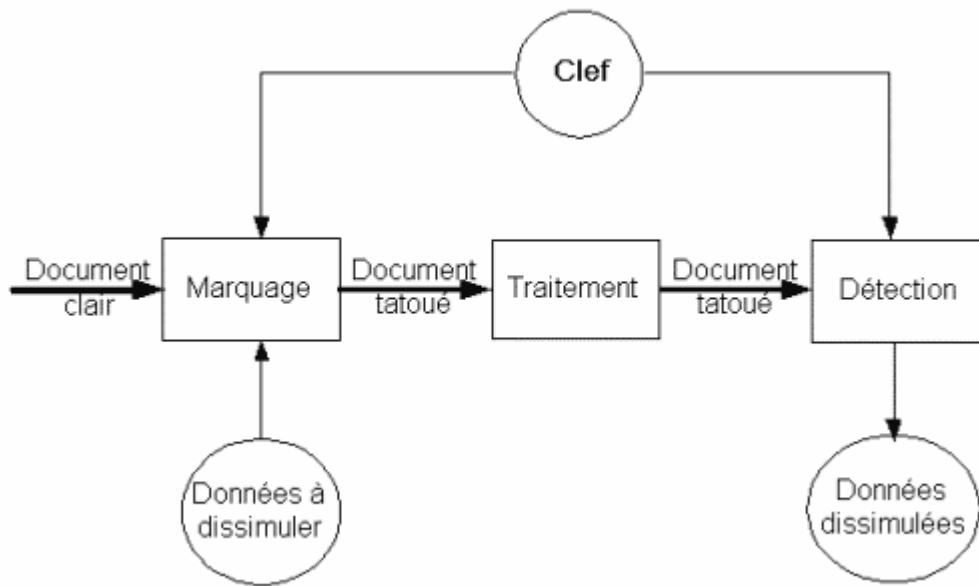


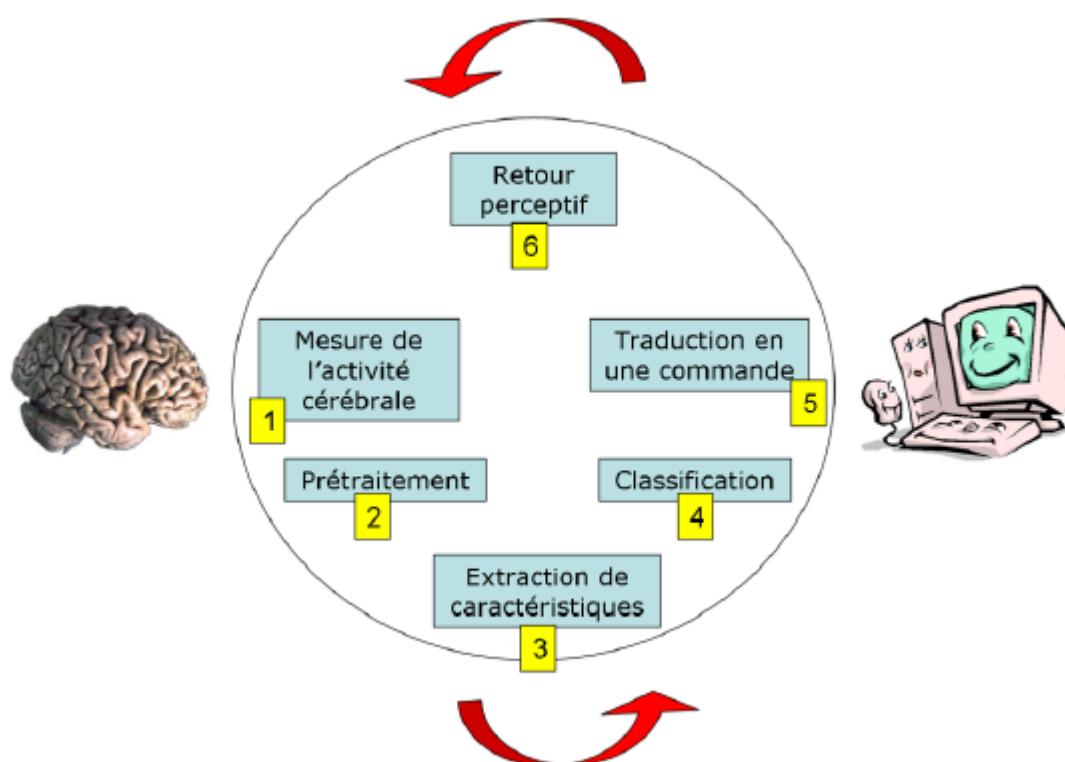
FIGURE 5.7 – Schéma illustratif du tatouage numérique.

permettent de bien exploiter les parties fortement texturées et les zones de contour de l'image. Ces éléments offrent des propriétés psycho-visuelles pouvant améliorer l'invisibilité du tatouage. Son utilisation comme support d'insertion de la marque assure une meilleure robustesse à la compression et au débruitage [XBA97, KH98, FF04]. Cette robustesse peut être obtenue à travers le choix des coefficients d'ondelette sur lesquels on doit insérer la marque. En constatant que la compression élimine les coefficients les plus bas, représentant les fréquences basses de l'image et le débruitage élimine les coefficients les plus élevés représentant les hautes fréquences, un choix judicieux serait d'insérer la marque sur les coefficients moyens.

Vu que ces mêmes propriétés multi-résolution se retrouvent dans la décomposition modale empirique, *Sabri et al.* introduisent un modèle de tatouage utilisant les IMFs comme support d'insertion de la marque [SKTA09]. Ce schéma de tatouage est caractérisé par une bonne capacité de détection de la marque et une bonne robustesse face à certaines attaques du fait de la redondance de l'information ajoutée dans l'image - *la marque* -. De nombreux travaux sont aussi réalisés en alliant la décomposition en ondelettes pour la sélection de l'espace de marquage et la décomposition modale empirique pour la technique d'insertion de la marque [BSH<sup>+</sup>07, TDT08].

### 5.3.5 L'analyse des composantes rythmiques dans les signaux *EEG* pour les Interfaces Cerveau-Machine (*ICM*) - ou *Brain Computer Interface (BCI)* -

Une interface cerveau-machine (*BCI*) est un système de communication qui ne nécessite aucune activité musculaire périphérique. En effet, les systèmes *BCI* permettent à un sujet d'envoyer des commandes à un dispositif électronique seulement à partir de son activité cérébrale. Ces interfaces peuvent être considérées comme étant le seul moyen de communication pour les personnes atteintes par certains handicaps moteurs.



**FIGURE 5.8** — Schéma général de fonctionnement d'une interface cerveau ordinateur.

Afin de sélectionner le classificateur le plus approprié pour un système *BCI* donné, il est essentiel de comprendre clairement quelles sont les caractéristiques utilisées, quelles sont leurs propriétés et comment elles sont utilisées. Cette section vise à décrire les caractéristiques communes de *BCI* et plus particulièrement leurs propriétés ainsi que la manière de les utiliser afin de tenir compte des variations de temps de l'*EEG*. Une grande variété de fonctionnalités ont été tentées pour la conception *BCI* tel que l'amplitude, les valeurs de signaux *EEG*, la puissance de bande, la densité spectrale de puissance (*PSD*), les paramètres autorégressifs (*AR*) et autorégressifs adaptatifs (*AAR*), les caractéris-

tiques temps-fréquence et les caractéristiques basées sur des modèles inverses. Concernant la conception d'un système *BCI*, certaines propriétés essentielles de ces caractéristiques doivent être considérées :

- **Le bruit et les valeurs aberrantes** : les caractéristiques du *BCI* sont bruyantes ou contiennent des valeurs aberrantes car les signaux *EEG* ont un faible rapport signal sur bruit ;
- **La haute dimensionnalité** : Dans les systèmes *BCI*, les vecteurs de caractéristiques sont souvent d'une haute dimensionnalité. En effet, plusieurs caractéristiques sont généralement extraites de plusieurs canaux et de plusieurs segments de temps avant d'être concaténés dans un vecteur caractéristique unique ;
- **L'information temporelle** : les caractéristiques *BCI* doivent contenir des informations temporelles car les patterns de l'activité cérébrale sont généralement liées à des variations temporelles du signal *EEG*.
- **La non-stationnarité** : les caractéristiques *BCI* sont non stationnaires car les signaux *EEG* peuvent rapidement varier dans le temps et plus particulièrement durant les sessions expérimentales ;

La base sous-jacente des caractéristiques électrophysiologiques au cours d'une *MI* (*motor imagery*) est que le *MI* unilatéral provoque une synchronisation contralatérale des événements liés - *ERS* pour *Event Related Synchronization* - et une désynchronisation - (*ERD*) pour *Event Related Desynchronization* - dans le cortex moteur. La *DRE* - ou *ERS* - provoque une diminution - ou une augmentation - de l'énergie des composantes rythmiques de l'*EEG*, respectivement. Une découverte précédente a montré que le *MI* provoque la *DRE* et *ERS* sur les bandes *alpha* ( $8 - 12Hz$ ) et *bêta* ( $14 - 30Hz$ ), ainsi que sur l'exécution du mouvement. De nombreuses études ont également montré que les événements *DRE* / *ERS* sont une spécificité du sujet. Compte tenu des défauts théoriques inhérents des méthodes classiques d'analyse temps-fréquence dans l'étude des signaux non-stationnaires, la Décomposition Modale Empirique (*EMD*) et la Transformation de Huang-Hilbert (*HHT*) se sont montrées très efficaces pour analyser les composantes rythmiques contenues dans les signaux *EEG*. La première étape de la procédure est d'extraire les caractéristiques temps-fréquence à partir du spectre *HHT* [WLL09].

La propriété multi-résolution de l'*EMD* permet de récupérer facilement les sous-bandes de fréquence du signal *EEG* qui interviennent sur la représentation du mouvement ou du caractère à étudier. Vu que le signal *EEG* est récupéré à partir de plusieurs capteurs du système 10 – 20, nous pouvons utiliser l'*EMD* multivariée afin de pouvoir récupérer les mêmes niveaux de fréquences sur les mêmes numéros d'*IMF*.

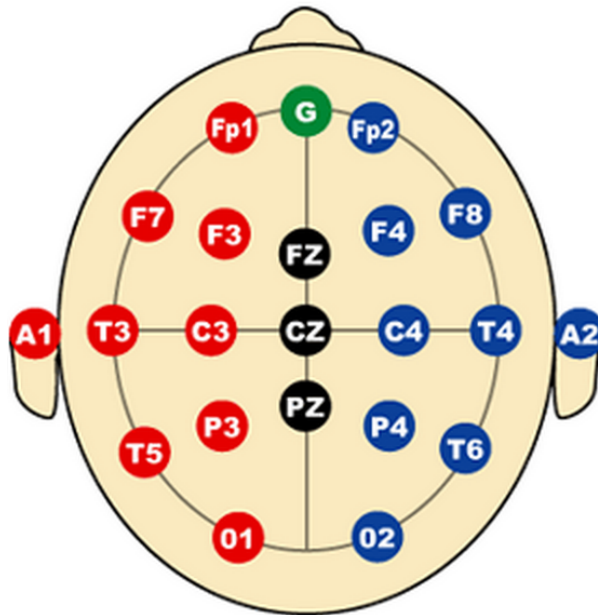


FIGURE 5.9 — Le système international 10 – 20, image de «l'institut Immrama».

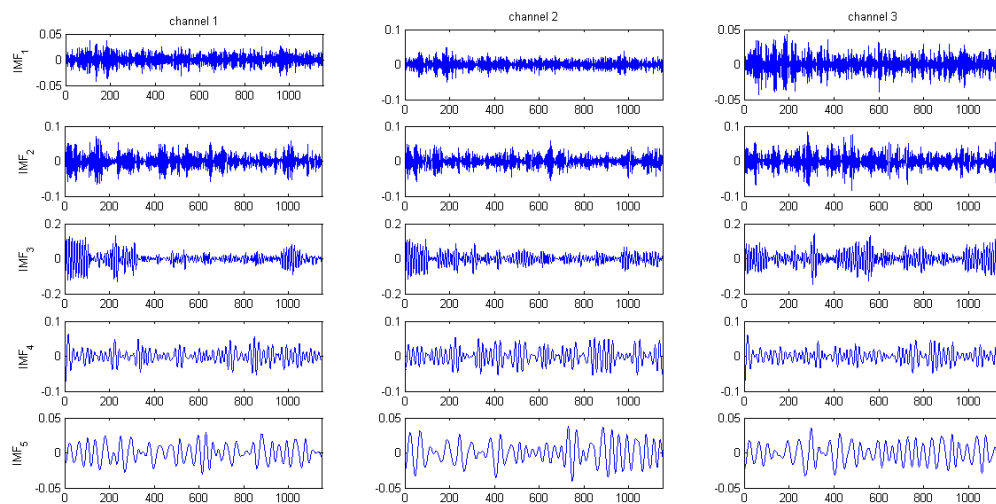
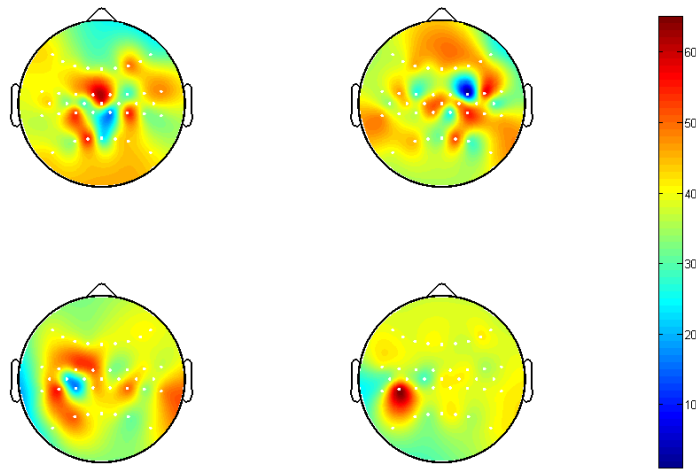


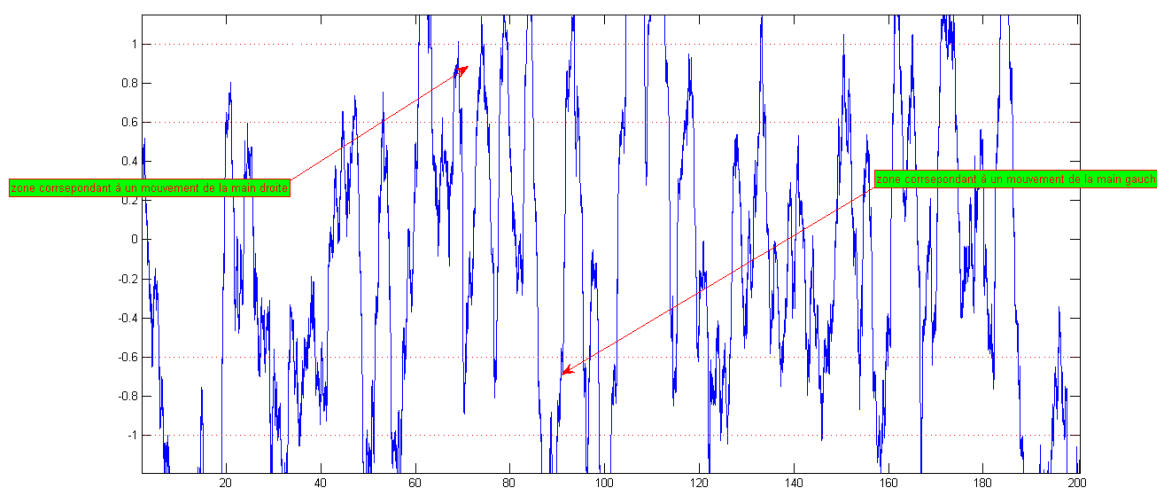
FIGURE 5.10 — Les 5 premières *IMF* de la décomposition *EMD multivariée* d'un signal *EEG* récupéré à partir de 3 canaux du système 10 – 20.



**FIGURE 5.11** — Représentation de la densité spectrale de puissance sur un scalpe.

Pour sélectionner des caractéristiques spatiales, on peut utiliser la méthode du maximum d'informations mutuel (*MMI*) afin de séparer les classes de signaux les plus discriminables de tous les canaux. Pour la classification, ils utilisent l'algorithme de la machine à vecteur de support *SVM*.

Nous pouvons donner l'exemple de la classification de l'intension de mouvement de la main droite ou de la main gauche d'une personne. Les données utilisées proviennent du *BCI Competition*. L'expérience comporte une phase d'apprentissage avec des données bien maîtrisées, étiquetées avec le type de mouvement concerné. Une fois le système bien renseigné sur un individu donné, on pourra passer au test avec des données non maîtrisées.



**FIGURE 5.12** — Classification d'une série d'intensions de mouvement de la main droite ou de la main gauche pour un individu donné.

## 5.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié quelques applications de la décomposition modale empirique sur des signaux et images aussi bien synthétiques que réels. Etant très comparable avec la transformée en ondelettes, l'*EMD* est devenu un outil pouvant donner des résultats parfois meilleurs sans besoin d'une connaissance a priori sur le signal contrairement aux ondelettes qui nécessitent la définition d'une base d'ondelettes adapté à chaque type de signal. Le cadre mathématique offert par l'approche *EDP* pour la décomposition modale empirique permet une meilleure maîtrise d'outils favorisant une extension *2D* pour des applications en traitement de l'image. Comme chaque *IMF* est sensée avoir un sens physique en capturant une certaine gamme de fréquences, on peut supposer que le bruit est contenu dans les premières *IMFs*, qui contiennent les fréquences les plus élevées. L'*EMD* s'est montrée aussi très efficace pour des applications comme la compression, et est utilisé pour le tatouage d'image, l'analyse de texture, en imagerie médicale et les interfaces cerveau-machine.

## Troisième partie

Une nouvelle méthode auto-adaptative  
pour la représentation du signal :  
la Décomposition Spectrale Intrinsèque.





Chapitre

6

## Un nouvel interpolateur *EDP* : existence, résultats et applications

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>95</b>
<b>6.2</b>	<b>Modélisation mathématique du nouvel interpolateur <i>EDP</i></b> . .	<b>96</b>
<b>6.3</b>	<b>Interprétation de l'action de la diffusivité dans le processus de diffusion</b> . . . . .	<b>99</b>
<b>6.4</b>	<b>Résolution spectrale de l'équation aux dérivées partielles</b> . .	<b>100</b>
<b>6.5</b>	<b>Solution asymptotique de l'<i>EDP</i></b> . . . . .	<b>101</b>
<b>6.6</b>	<b>Quelques résultats de l'interpolateur <i>EDP</i></b> . . . . .	<b>101</b>
<b>6.7</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>107</b>

---

### 6.1 Introduction

LES interpolateurs sont largement utilisés dans le traitement et l'analyse du signal ou de données. Dans le cas particulier de l'algorithme de la décomposition modale empirique [HSLa98, DLN05], l'estimation itérative de la tendance du signal est basée sur l'estimation de l'enveloppe obtenue par interpolation par spline cubique des extrema locaux. L'interpolation par spline a été reconnue comme étant très efficace pour l'*EMD*, mais pour les signaux qui n'ont pas d'extrema locaux, l'interpolation par spline cubique échoue. Un modèle basé sur les équations aux dérivées partielles qui surmonte cette limite de l'*EMD* classique a été proposé dans [DLN05, Nia07, NTG<sup>+</sup>12a]. Récemment nous avons proposé la décomposition spectrale intrinsèque (en anglais *Spectral Intrinsic Decomposition*

*SID*) [NTDL12] qui est basée sur la décomposition spectrale de l'interpolateur *EDP*. Cette interpolateur *EDP* contribue à la modélisation mathématique de l'*EMD* et fournit diverses applications dans le domaine du traitement du signal et de l'image [NDL10, NTG<sup>+</sup>12a]. Dans ce qui suit, nous décrivons la modélisation mathématique du nouvel interpolateur *EDP*. La résolution du problème variationnel conduit à l'existence et des résultats d'unicité de la solution dans les espaces appropriés.

## 6.2 Modélisation mathématique du nouvel interpolateur *EDP*

Rappelons que le modèle *EDP* vise à contribuer à la modélisation mathématique de l'*EMD*, comme il est montré dans [DLN05]. Dans un premier temps, pour être en conformité avec l'*EMD* classique, notre objectif est de modéliser l'enveloppe supérieure ou inférieure comme une solution asymptotique d'un système *EDP* dont le premier état est le signal d'entrée dont nous voulons interpoler les extrema locaux - *ou plus généralement des points caractéristiques* -. Au départ, cette enveloppe est obtenue par interpolation par spline cubique. Soit  $\Omega$  le domaine de définition d'un signal d'énergie finie c'est à dire  $u_0 \in L^2(\omega)$ . Nous construisons un opérateur  $A$  de domaine  $D(A)$  approprié tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Au &= 0 \quad \text{dans } [0, T] \times \Omega \\ &\quad ; \text{ plus les conditions aux bords} \\ u(0, x) &= u_0 \quad \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{6.1}$$

Comme nous ne devons pas nous éloigner de ce que nous voulons modéliser - *une enveloppe par spline cubique* -, les propriétés de l'opérateur  $A$  doivent rappeler les qualités de l'enveloppe calculée par spline cubique. Ainsi cet opérateur doit :

1. préserver les extrema de  $u_0$  ;
2. permettre d'obtenir une solution pour l'*EDP* de régularité semblable à celle d'une spline cubique ;
3. et enfin, vérifier éventuellement des contraintes supplémentaires issues de l'esprit de l'algorithme *EMD*.

Le besoin d'avoir la solution asymptotique notée  $u_\infty$ , entraîne que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\infty, x) = 0 \quad ;$$

c'est à dire que, d'après l'équation (6.1)

$$Au(\infty, x) = 0$$

De plus, le besoin que la solution ait la même régularité qu'une spline cubique conduit à

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\infty, x) = 0$$

Ainsi, en première analyse on peut choisir

$$Au = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Pour laisser invariant les points caractéristiques durant la diffusion, il suffit de multiplier dans l'expression de  $Au(\infty, x) = 0$ , le terme  $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$  par une fonction  $g$  dépendant de la variable spatiale  $x$  et ne s'annulant qu'aux points caractéristiques. Ce qui donne

$$Au(x) = g(x) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \quad (6.2)$$

Une autre forme possible qui rejoint le standard de modèles connus sous le nom de *Long Range Diffusion* [Mur93] est la suivante

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (6.3)$$

La fonction  $g$  peut être interprétée comme une fonction de diffusivité dont le rôle est de contrôler la diffusion ; elle est prise nécessairement positive pour obtenir un phénomène de diffusion directe et pour le besoin de l'existence de solution. D'autres formes d'opérateurs sont possibles, nous en citons quelques unes :

1. une variante de l'équation (6.2)

$$Au(x) = g(x) \left[ -\theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (1 - \theta) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right] \quad (6.4)$$

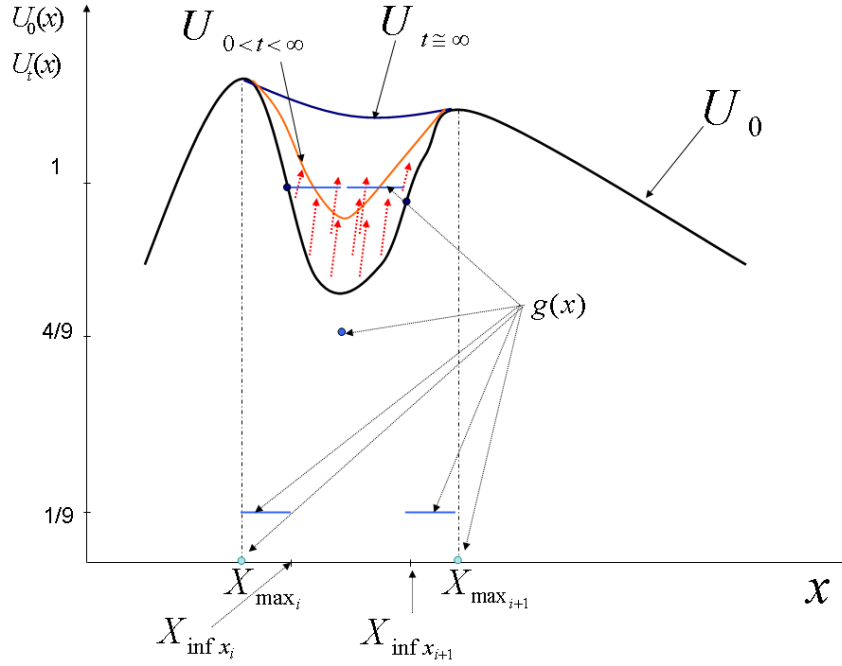
2. ou une variante de l'équation (6.3)

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left[ g(x) \left( -\theta \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \theta) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \right] \quad (6.5)$$

3. ou une diffusion complète faisant intervenir un flux

$$Au(x) = \frac{\partial u}{\partial x} \left[ -\theta g(x) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \right] \quad (6.6)$$

où  $0 < \theta < 1$  est le facteur de tension. Ces deux formes autorisent plus de liberté sur la régularité de la solution  $u$ . Pour accéder aux propriétés mathématiques de la solution, nous avons choisi la deuxième forme (6.5) avec  $\theta = 0$  et qui correspond à l'équation (6.3). A l'échelle locale, entre deux points caractéristiques consécutifs - *deux maxima locaux par*



**FIGURE 6.1** — La diffusion qui se fait dans la direction de l’enveloppe supérieure, a pour effet de supprimer le minimum local entre deux maxima consécutifs. Ici, la fonction  $g$  est constante par morceaux

*exemple* -, la diffusion induit un phénomène de lissage qui éliminera le minimum local, voir figure 6.1.

L’un des avantages du modèle ci-dessus est son caractère intrinsèque car, il ne procède pas explicitement à une détection des points caractéristiques du signal. Cette détection s’opère implicitement et est gouvernée par la fonction  $g(x)$  qu’on peut appeler fonction de diffusivité. Cette fonction de diffusivité ne dépend que de  $u_0$  et des points caractéristiques - *extrema ou points d’inflexion ou points de changement de maximum de courbure* - .

Comme il est défini dans [DLN05, NDL10], l’enveloppe supérieure ( $s^+$ ) et l’enveloppe inférieure ( $s^-$ ) peuvent être assimilées à la solution asymptotique de l’équation aux dérivées partielles couplée suivante :

$$\frac{\partial s^\pm(x, t)}{\partial t} + g^\pm(x, t) \left( \theta \frac{\partial^2 s^\pm(x, t)}{\partial x^2} + (1 - \theta) \frac{\partial^4 s^\pm(x, t)}{\partial x^4} \right) = 0 \quad (6.7)$$

où  $\theta$  est le paramètre de tension qui varie de 0 à 1. La solution initiale de cette équation est  $s^\pm(x, t) = s_0$ ,  $g^\pm$  sont les fonctions d’arrêt ou fonctions de diffusivité et dépendent des dérivées du signal, avec  $0 \leq g \leq 1$ .

Dans ce qui suit, nous définissons  $g_e^\pm$  pour la détection des extrema,  $g_f$  les points d’inflexion et  $g_{mc}^\pm$  pour les maxima et minima de courbure :

$$g_e^\pm(x) = \frac{1}{9} \left[ \left| \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial s_0(x)}{\partial x} \right) \right| \pm \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) + 1 \right]^2 \quad (6.8)$$

(+) pour les maxima et (−) pour les minima,

$$g_f(x) = \left[ \operatorname{sgn}_\theta \left( \frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) \right]^2 \quad (6.9)$$

pour les points d'inflexion,

$$g_{mc}^\pm(x) = \left[ \left| \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^3 s_0(x)}{\partial x^3} \right) \right| \pm \operatorname{sgn} \left( \frac{\partial^2 s_0(x)}{\partial x^2} \right) + 1 \right]^2 \quad (6.10)$$

(+) pour les points de maximum de courbure et (−) pour les points de minimum de courbure. Toutes ces fonctions sont de la forme  $g(x) = [h(x)]^2$  avec  $h(x) = 0$  aux points caractéristiques. Pour assurer l'existence et de la régularité de la solution, nous avons eu à travailler avec la version régularisée de la fonction *signe* :

$$\operatorname{sgn}_\theta(z) = \arctan\left(\frac{\pi z}{\theta}\right), \quad (6.11)$$

où  $\theta$  est un facteur de régularisation.

### 6.3 Interprétation de l'action de la diffusivité dans le processus de diffusion

Entre deux maxima consécutives  $X_{max_i}$  et  $X_{max_{i+1}}$ , la fonction  $g_e^+$  est constante par morceaux et peut s'écrire comme suit :

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{en } X_{max_i}, X_{max_{i+1}} \\ \frac{4}{9}, & \text{en } X_{inf_i}, X_{inf_{i+1}}, X_{min_i} \\ 1, & \text{sur } ]X_{inf_i}, X_{min_i}[ \cup ]X_{min_i}, X_{inf_{i+1}}[ \\ \frac{1}{9}, & \text{sur } ]X_{max_i}, X_{inf_i}[ \cup ]X_{inf_{i+1}}, X_{max_{i+1}}[ \end{cases} \quad (6.12)$$

Nous avons une diffusion dans le sens où  $u_t = \partial u / \partial t$  décroche vers le maximum de la courbe  $u_0$ . La raison en est que la diffusion est plus prononcée au niveau des minima locaux parce que l'effet de lissage tend à régulariser les courbes. Ainsi, l'enveloppe supérieure  $u(t \cong \infty, \cdot)$  de  $u_0$  est moins oscillante que le signal  $u_0$ . Le même phénomène se produit pour l'enveloppe moyenne. Nous pourrions alors essayer d'interpréter localement la relation  $u \geq u_0$  en évoquant le principe du maximum [Spe81]. Mais, ce principe n'est pas immédiatement vérifiable pour les équations du type (6.3). La justification réside dans le fait que le lissage implique  $\|\nabla u(t, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u_0\|_{L^2(\Omega)}$ .

## 6.4 Résolution spectrale de l'équation aux dérivées partielles

L'approximation numérique de la solution de l'équation (6.7) est obtenue par une discrétisation en différences finies avec les schémas numériques classiques tels que le schéma explicite, le schéma de *Crank-Nikelson* ou celui de *Du Fort et Frankel* [AK02, Mur93] peuvent être utilisés.

$$S^{k+1} = S^k + \Delta t A S^{k+1}, S^0 = S_0. \quad (6.13)$$

On note  $\Delta t$  le pas temporel et  $A$  est une matrice issue de l'approximation en différence finie des coefficient du second et quatrième des opérateurs différentiels (resp.  $D_2$  et  $D_4$ ), comme suit :

$$A = G [\alpha D_2 - (1 - \alpha) D_4], \quad (6.14)$$

avec  $G$  la matrice diagonale de la fonction de diffusion  $g^\pm[n]$  construite avec la version discrète de la fonction  $g(x)$  comme suit :

$$g(\delta_x^3 s_0, \delta_x^2 s_0) = g(D_1 D_2 s_0, D_2 s_0), \quad (6.15)$$

où  $D_2 z = D^+ D^- z$  et  $D_1 z = m(D^+ z, D^- z)$  avec  $D^+$  et  $D^-$  les dérivées à gauche et à droite en  $x$ , et  $m(a, b)$  l'estimation de la dérivée au sens de *minmod* [Nia07, DLN05],

$$m(a, b) = 0.5(\text{sgn}(a + b) \min(|a|, |b|)).$$

Ainsi, la forme explicite conduit à la résolution numérique suivante :

$$S^{k+1} = (I - \Delta t A)^{-1} S^k, S^0 = S_0. \quad (6.16)$$

avec  $I$  la matrice identité. Enfin (6.7) peut être décomposée comme suit :

$$S^{k+1} = L^{-1} S^k, S^0 = S_0, k \geq 0, \quad (6.17)$$

où  $L$  est l'opérateur linéaire y compris les valeurs de la fonction de diffusion et l'opérateur différentiel formé par dérivée du quatrième et du second ordre. Ainsi, en se référant à des schémas numériques (6.16),  $L$  est donnée par :

$$L = I - \Delta t A. \quad (6.18)$$

La matrice opérateur  $L$  a des valeurs propres réelles qui sont toujours supérieures ou égales à 1. Ainsi, les valeurs propres,  $\lambda_n$ , de  $L^{-1}$  sont toujours inférieures ou égal à 1, ( $0 \leq \lambda_n \leq 1$ ), voir [NDL10]. Dans la figure 7.1(d), une distribution des valeurs propres est tracée pour un signal donné.

## 6.5 Solution asymptotique de l'EDP

Le schéma itératif (6.17) peut être réécrit en fonction de la solution initiale  $S_0$  :

$$S^k = (L^{-1})^k S_0, k \geq 1, \quad (6.19)$$

à la convergence, la solution asymptotique,  $S_\infty$  est donnée par :

$$S_\infty = (L^{-1})^\infty S_0. \quad (6.20)$$

Soit  $V$  une matrice dont les colonnes sont les vecteurs propres  $V_n$  de  $L^{-1}$  et  $D$  une matrice diagonale ayant les valeurs propres  $\lambda_n$  de  $L^{-1}$  à la diagonale. Nous avons donc la décomposition suivante :

$$L^{-1} = V\mathcal{D}V^{-1} \quad (6.21)$$

Il est alors évident de voir que :

$$(L^{-1})^k = (V\mathcal{D}V^{-1})^k = V(\mathcal{D})^k V^{-1} \quad (6.22)$$

Donc, la solution asymptotique définie dans (6.21) est obtenue par :

$$S_\infty = (V\mathcal{D}^\infty V^{-1})S_0. \quad (6.23)$$

Lorsqu'on fait tendre  $k$  vers l'infini, la matrice diagonale de valeurs propres  $\mathcal{D}$  prendra les valeurs  $\lambda_n^\infty = 0$  si  $\lambda_n < 0$  et  $\lambda_n^\infty = 1$  ailleurs, - *c'est à dire là où  $\lambda_n^\infty = 1$*  -. Ainsi, nous allons nous retrouver avec une matrice asymptotique qui est nulle presque partout sauf en quelques points de la diagonale où la valeur propre tend vers 1 à l'infini. Comme nous l'avons montré dans (6.23), la solution enveloppe  $S_\infty$  est une combinaison linéaire des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 pondérés par l'amplitude du signal.

## 6.6 Quelques résultats de l'interpolateur EDP

D'abord, nous présentons dans la figure 6.2 un cas pathologique de signal sans extremum local, dont on ne peut pas calculer les enveloppes par interpolation par spline des extrema. Notre interpolateur EDP fonctionne bien avec la détection points *Max-Min de courbure* dans la fonction de diffusivité. La figure 6.3 représente l'évolution de la solution EDP avec la forme donnée par l'équation (6.2). Lors de l'itération 40000, la solution évolue presque plus, il est potentiellement une enveloppe.

Dans la figure 6.4, nous représentons le calcul de l'enveloppe de la même fonction avec la forme donnée par l'équation (6.4) pour différents facteurs de tension. Nous pouvons



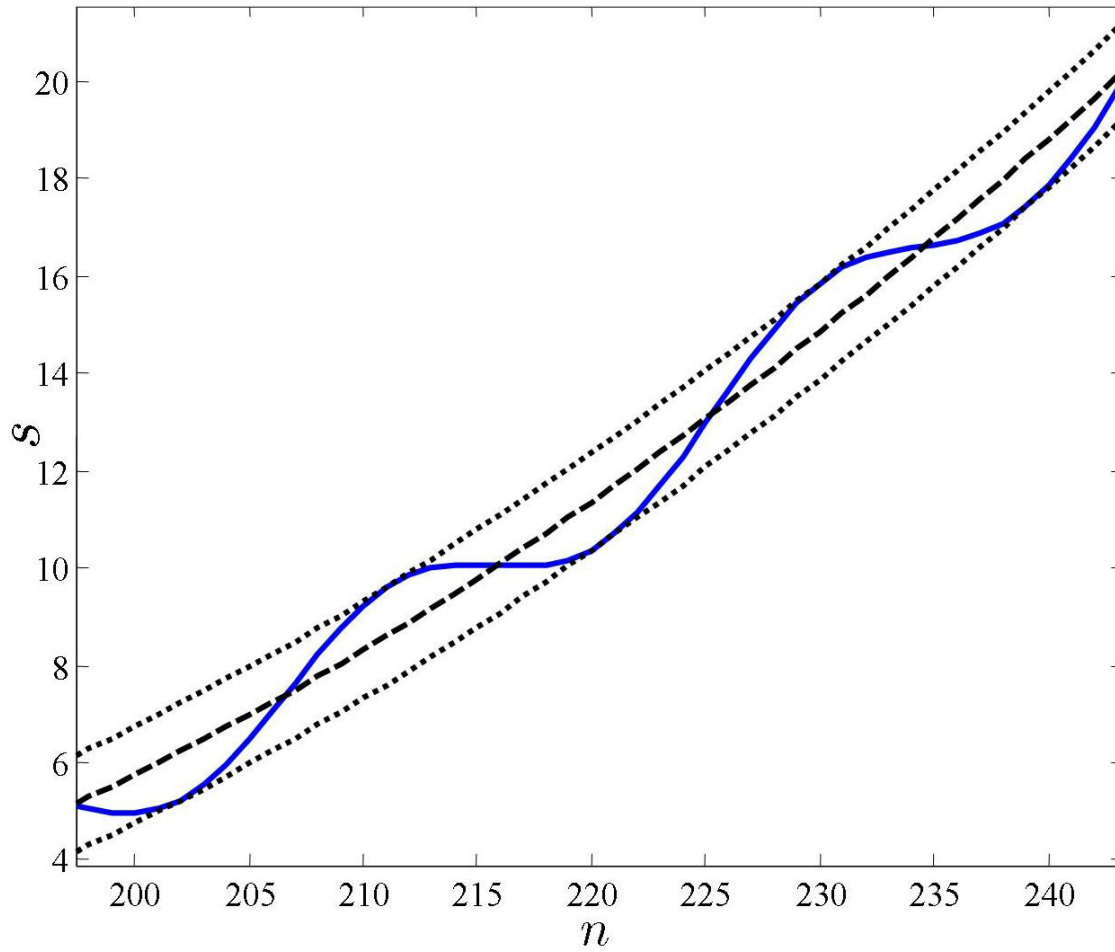
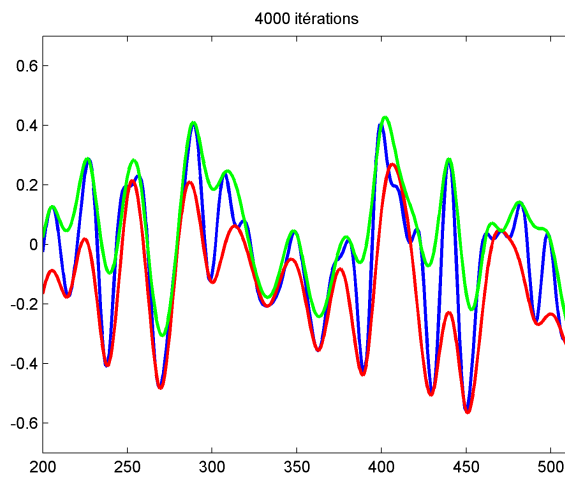


FIGURE 6.2 – Interpolateur *EDP* pour un signal sans extrema locaux.

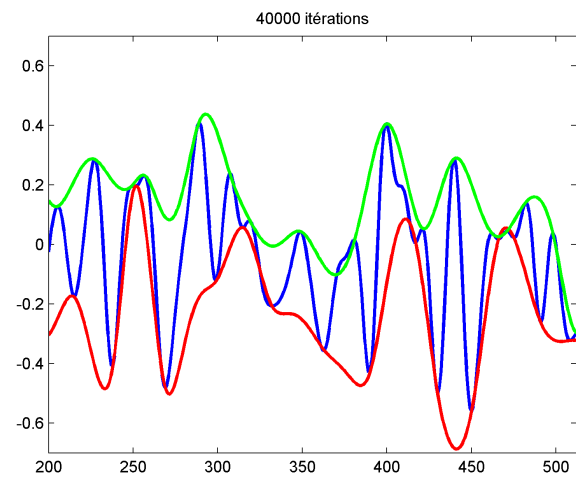
constater que la régularité des enveloppes n'y est plus pour des valeurs de  $\theta$  proches de zéro.

Dans la figure 6.5, nous représentons le calcul des enveloppes avec la forme de l'*EDP* donnée par l'équation (6.4) pour la valeur de la tension  $\theta = 0$ .

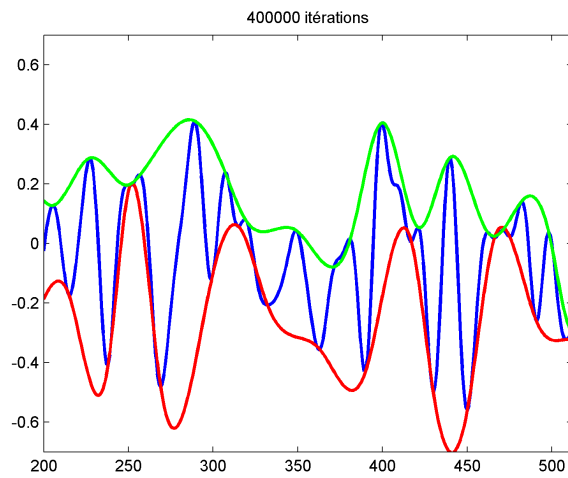
Dans la figure 6.6, nous faisons une comparaison entre notre *interpolateur EDP* et l'interpolation *spline cubique* pour un signal d'entrée  $s$  issu de la superposition de deux composantes sinusoïdales d'amplitudes et de fréquences différentes,  $s_1$  et  $s_2$ . Quand il s'agit d'interpoler les extrema locaux classiques, nous avons presque le même résultat, les deux n'étant pas satisfaisants, ce qui nécessite certainement un peu plus d'itérations dans le sifting process. Par contre notre interpolateur qui passe par les points de maximum et minimum de courbure locale donne les enveloppes correctes assez proprement.



(a) Les enveloppes à l'itération 4000

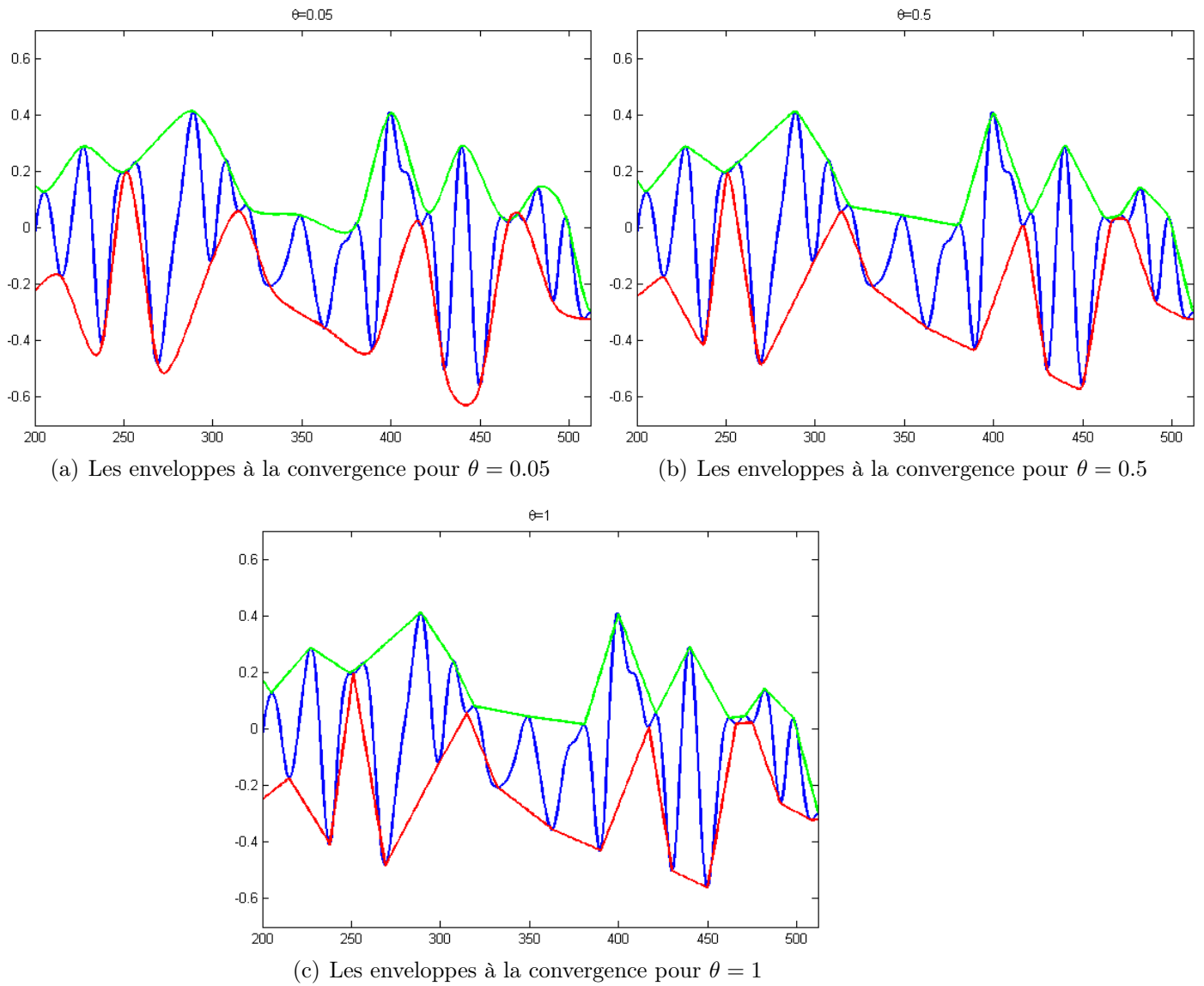


(b) Les enveloppes à l'itération 40000

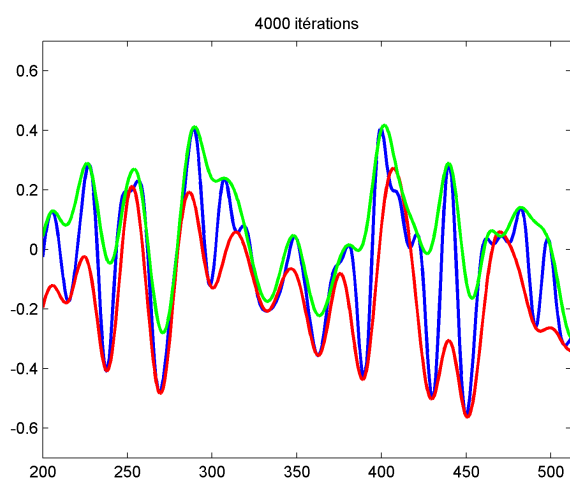


(c) Les enveloppes à l'itération 400000

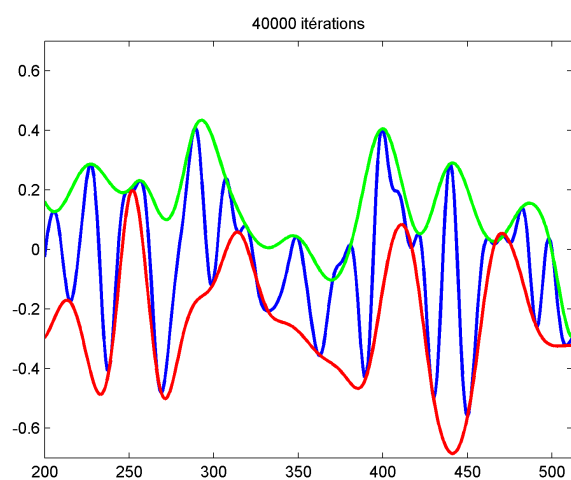
**FIGURE 6.3** — En (a) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 4000. En (b) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 40000. En (c) : calcul des enveloppes avec un nombre d'itérations égal à 400000.



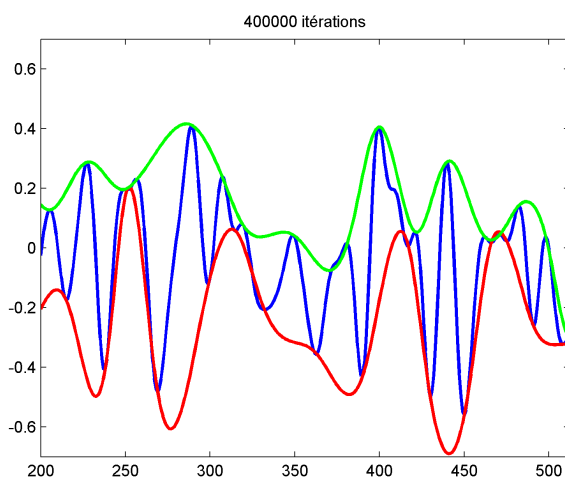
**FIGURE 6.4** — En  $(a, b, c)$  représentations des enveloppes à la convergence de l'*EDP*.



(a) Les enveloppes à l'itération 4000



(b) Les enveloppes à l'itération 40000



(c) Les enveloppes à l'itération 400000

**FIGURE 6.5** — Calcul des enveloppes sur la base du modèle de l'équation (6.4) avec  $\theta = 0$ . En (a) : à cette étape les deux enveloppes se chevauchent par endroit. En (b) : moins de chevauchement constaté et pratiquement la solution asymptotique est atteinte. En (c) : stabilité de l'évolution aboutissant à la solution.

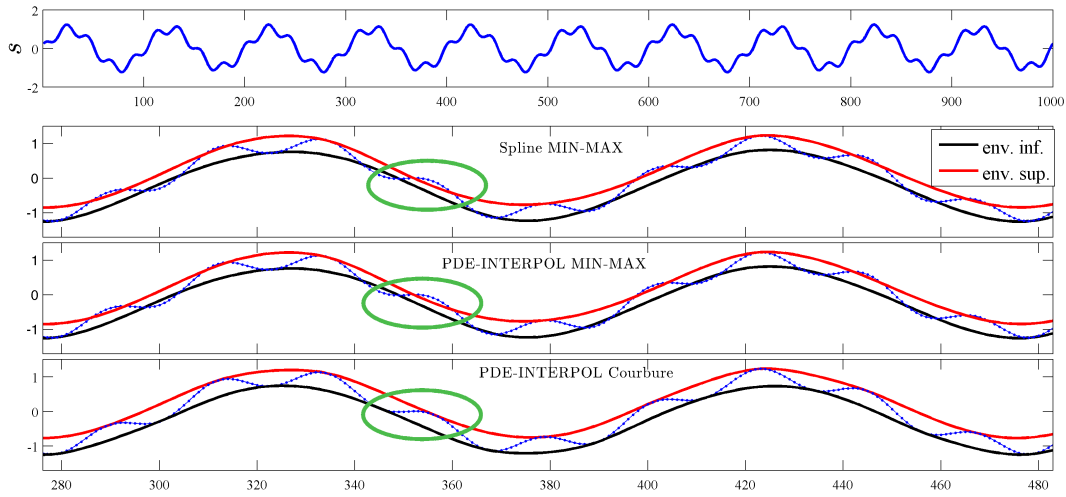


FIGURE 6.6 — Interpolateur *EDP* pour un signal sans extrema locaux.



FIGURE 6.7 — Interpolateur *EDP* pour la restauration d'image. Une image originale est altérée et restaurée avec la version 2D de l'interpolateur *EDP*.

## 6.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini un nouvel interpolateur *EDP* qui permet de calculer les enveloppes d'un signal. Le cadre théorique contribue à la modélisation mathématique de l'algorithme *EMD*. Les tests à la fois en traitement du signal et de l'image démontrent l'efficacité du nouvel interpolateur et fournit un aperçu des possibilités de l'analyse multi-échelle d'un signal multidimensionnel.



# La Décomposition Spectrale Intrinsèque

## Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>109</b>
<b>7.2</b>	<b>Principe de la Décomposition Spectrale Intrinsèque</b>	<b>110</b>
<b>7.3</b>	<b>Présentation de l'algorithme de la Décomposition Spectrale Intrinsèque</b>	<b>110</b>
<b>7.4</b>	<b>Propriétés des <i>SPMFs</i></b>	<b>111</b>
7.4.1	Qualité d'atomes temps-fréquences	112
7.4.2	Construction d'un dictionnaire temps-fréquences	112
7.4.3	Relation entre <i>SPMFs</i> et fréquences locales	113
7.4.4	Interprétation de la décomposition <i>SID</i>	113
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>114</b>

---

## 7.1 Introduction

LA DÉCOMPOSITION SPECTRALE INTRINSÈQUE (*SID*) est une nouvelle méthode auto-adaptative pour la représentation des signaux non linéaires [NTDL12]. Cette approche est basée sur la décomposition spectrale de l'opérateur basé sur une équation aux dérivées partielles qui permet d'interpoler les points caractéristiques d'un signal. Les composantes du *SID* qui sont les vecteurs propres de cet opérateur *interpolateur PDE* sont à la base de la nouvelle méthode de *décomposition-reconstruction* du signal. L'utilité et l'efficacité de cette méthode sont illustrées, dans la reconstruction ou le débruitage du signal, dans certains exemples utilisant des signaux artificiels et pathologiques.



## 7.2 Principe de la Décomposition Spectrale Intrinsèque

La Décomposition Spectrale Intrinsèque ou *Spectral Intrinsic Decomposition* (*SID*) [NTDL12] est une méthode auto-adaptative de représentation du signal, qui est inspirée de l'approche spectrale du *sifting process* pour la décomposition modale empirique [NDL10]. La décomposition se fait à partir d'un dictionnaire composé de vecteurs propres de l'opérateur enveloppe supérieure ou inférieure du signal  $s_0$  à décomposer. Cet opérateur renferme des informations sur la position des points caractéristiques et sur le signal dans sa globalité. Cela est dû au fait que la fonction de diffusivité qui reste un élément essentiel de cet opérateur, est construite à partir de ces points caractéristiques, mais dépend aussi des dérivées première, seconde et troisième du signal à décomposer selon le modèle de diffusion choisi. Ce qui explique d'ailleurs le caractère intrinsèque et auto-adaptatif de la méthode *SID*. Cette enveloppe supérieure  $S_+$  ou inférieure  $S_-$  n'est rien d'autre que la solution asymptotique d'un système d'équations aux dérivées partielles couplées définie dans la section 6.2. Ces vecteurs propres sont appelés *Fonction Mode Propre Spectrale* ou *Spectral Proper Mode Function* (*SPMF*). Notre objectif est de pouvoir donner une représentation du signal  $s_0$  comme une combinaison linéaire de ces *SPMF*.

## 7.3 Présentation de l'algorithme de la Décomposition Spectrale Intrinsèque

La procédure de la Décomposition Spectrale Intrinsèque (*SID*) est définie comme le calcul des *SPMFs* pour un signal donné. Prenons les mêmes notations que dans le chapitre 6 et considérons l'opérateur enveloppe supérieure  $E = L^{-1}$  (cf. (6.21)). La même procédure peut être effectuée pour l'enveloppe inférieure. La décomposition en valeurs propres de  $E$  donne :

$$[V_E, L_E] = \text{eig}(E),$$

où

$$V_E = [V_1, \dots, V_{\text{SIZEOF}(s_0)}] \quad \text{et} \quad L_E = [L_1, \dots, L_{\text{SIZEOF}(s_0)}],$$

(avec possibilité de compléter par des zéros pour atteindre la taille du vecteur) sont respectivement l'ensemble des vecteurs propres et l'ensemble des valeurs propres de  $E$ . Les coefficients de reconstruction  $s_0$  sont donnés par :

$$C = L_E V_E^{-1} s_0^\top \tag{7.1}$$

avec  $s_0^\top$  la transposée de  $s_0$ . D'où le signal  $s_0$  est calculé par la formule  $s_0 = VC$ .

La Décomposition Spectrale Intrinsèque de  $s_0$  décrit dans Algorithme 5, est donnée comme suit :

$$s_0 = \sum_{k=1}^N V_k C_k \quad (7.2)$$

Cette décomposition est intrinsèque et ne dépend que de la position des points caractéristiques du signal d'entrée de  $s_0$  qui définissent la diffusivité en fonction de l'opérateur d'interpolation. Nous remarquons que le *SID* fournit les mêmes capacités de reconstruction aussi bien avec l'enveloppe supérieure qu'avec l'enveloppe inférieure. La raison en est que l'opérateur *INTERPOLATEUR EDP* utilise toutes les données du signal  $s_0$  et les *SPMFs* issus de cette décomposition génèrent le même espace fonctionnel. Tous les *SPMFs* participent localement à la reconstruction du signal  $s_0$ . Par conséquent, au sens du principe de superposition, le *SID* est plus général que l'*EMD* classique.

---

**Algorithm 5** : SPECTRAL INTRINSIC DECOMPOSITION ALGORITHM

---

- 1: **compute** diffusivity function  $g^\pm$  from  $s_0$ , using for example *MCP* (6.8)
- 2: **compute** matrix operator  $L^{-1} = E$  (6.18)
- 3: **perform** eigendecomposition of  $\mathbf{E}$ ,  $[V_E, L_E] = \text{eig}(E)$
- 4: **perform** reconstruction coefficients of  $s_0$ ,  $C = L_E V_E^{-1} s_0^\top$
- 5: **set**  $[V_k]$ , and  $[L_k]$  for  $k = 1 \dots N$ ,

▷ Results

$$\text{and } s_0 \leftarrow \sum_{k=1}^N V_k * C_k$$


---

## 7.4 Propriétés des SPMFs

Les *SPMFs* calculés à partir de l'opérateur  $E$  sont adaptatifs et bien localisés autour des points caractéristiques du signal. Dans la figure 7.1, nous montrons le signal original à la figure 7.1(a), et des vecteurs propres - *SPMFs*  $V_{p_{920}}$ ,  $V_{p_{940}}$ ,  $V_{p_{960}}$ ,  $V_{p_{980}}$ ,  $V_{p_{100}}$  - associés aux plus basses valeurs propres pour l'enveloppe supérieure de la figure 7.1(b). La figure 7.1(c) présente les *SPMFs*  $V_{p_{20}}$ ,  $V_{p_{40}}$ ,  $V_{p_{60}}$ ,  $V_{p_{80}}$  et  $V_{p_{100}}$ . Autour de l'intermittence à la coordonnée 400, les derniers *SPMFs* correspondants aux plus petites valeurs propres présentent une non-stationnarité mais partout ailleurs contribuent à la composition du signal, avec une composante fixe et centrée, modulées en amplitude et en fréquence (*AM-FM*). Il est intéressant de noter que le *sifting process* de l'*EMD* [HSLa98] permet de traquer ces composantes *AM-FM* en recherchant de manière itérative autour des points caractéristiques, les extrema par exemple.

### 7.4.1 Qualité d'atomes temps-fréquences

Avant même de considérer une analyse temps-fréquence en terme énergétique, une approche intuitive est de décomposer linéairement un signal sur un ensemble de briques de base auxquelles on est en droit d'imposer de bonnes propriétés de localisation, en temps comme en fréquence. Lorsque le principe de l'*EMD* classique conduit à un niveau de décomposition locale à deux composantes - *une composante fortement oscillée et une tendance locale* -, la décomposition *SID* donne une séquence de composantes vraiment localisées dont le nombre est supérieur au nombre de points caractéristiques selon la formule suivante :

$$S_0 = \sum_{k \in \{j/\lambda_j=1\}} V_k * C_k + \sum_{k \notin \{j/\lambda_j=1\}} V_k * C_k. \quad (7.3)$$

où  $V_k$  représente un vecteur propre de  $E$  (*SPMF*) et  $C_k$  le coefficient de décomposition qui dépend du signal d'entrée  $s_0$ . Le premier terme de (7.3) correspond à l'enveloppe du signal  $s_0$ . Ensuite, il apparaît que le *SID* fournit une généralisation du principe de l'*EMD* classique parce que dans (7.3), nous avons un nombre de composantes plus grand que le nombre de maxima ou de minima. Les *SPMFs* participent tous à la dynamique du signal avec une forte localisation autour des points qui ont généré les vecteurs propres. Dans la figure 7.2 nous avons représenté quelques *SPMFs* avec leur représentation dans le plan temps-fréquence pour montrer que les atomes issus de la décomposition *SID* sont bien adaptés à une analyse de type temps-fréquence.

### 7.4.2 Construction d'un dictionnaire temps-fréquences

Dans la plupart des cas, un *SPMF* peut être considéré comme une ondelette non linéaire à bande étroite avec une modulation d'amplitude par un signal de basse fréquence  $a[n]$  :

$$SPMF_k[n] = a_k[n] \varphi_k[n]. \quad (7.4)$$

Nous pouvons alors construire un dictionnaire  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (\psi_p)_{p=1,\dots,N} \right\}, \quad (7.5)$$

$N$  étant le nombre de *SPMFs*.

Le choix du dictionnaire  $\mathcal{D}$  a une très grande influence sur la qualité de la décomposition du signal. En effet, si le dictionnaire ne contient pas du tout ou très peu d'atomes adaptés aux structures présentes dans le signal, la décomposition sera, quelle que soit la méthode choisie, mauvaise. L'avantage que nous avons avec le *SID* est son caractère intrinsèque et auto-adaptatif. Ce qui fait que les atomes du dictionnaire construit à partir

des *SPMFs* représentent bien les différentes caractéristiques du signal à décomposer. Cependant, chaque signal peut être écrit sous forme d'une combinaison linéaire des vecteurs de ce dictionnaire. La redondance et l'orthogonalité du dictionnaire dépendent des propriétés de l'opérateur  $E$ . Si  $E$  est symétrique, on peut avoir l'orthogonalité et des *SPMFs* qui sont très similaires aux ondelettes comme le montre l'exemple de la figure 7.1.

### 7.4.3 Relation entre *SPMFs* et fréquences locales

Les points caractéristiques contribuent à l'apparition de non-stationnarités au niveau des *SPMFs* pour le *SID*. Ainsi, les *SPMFs* contiennent des fréquences locales du signal. Aussi localement, la décomposition en *SPMFs* (*SID*) fonctionne comme le principe de base de l'*EMD* qui considère un signal comme une superposition de composantes basses fréquences et des composantes de fréquences plus élevées. Seulement, avec le *SID*, nous avons un plus grand nombre de composantes, ce qui permet une contribution en fréquence locale de chaque *SPMF* en chaque point du signal.

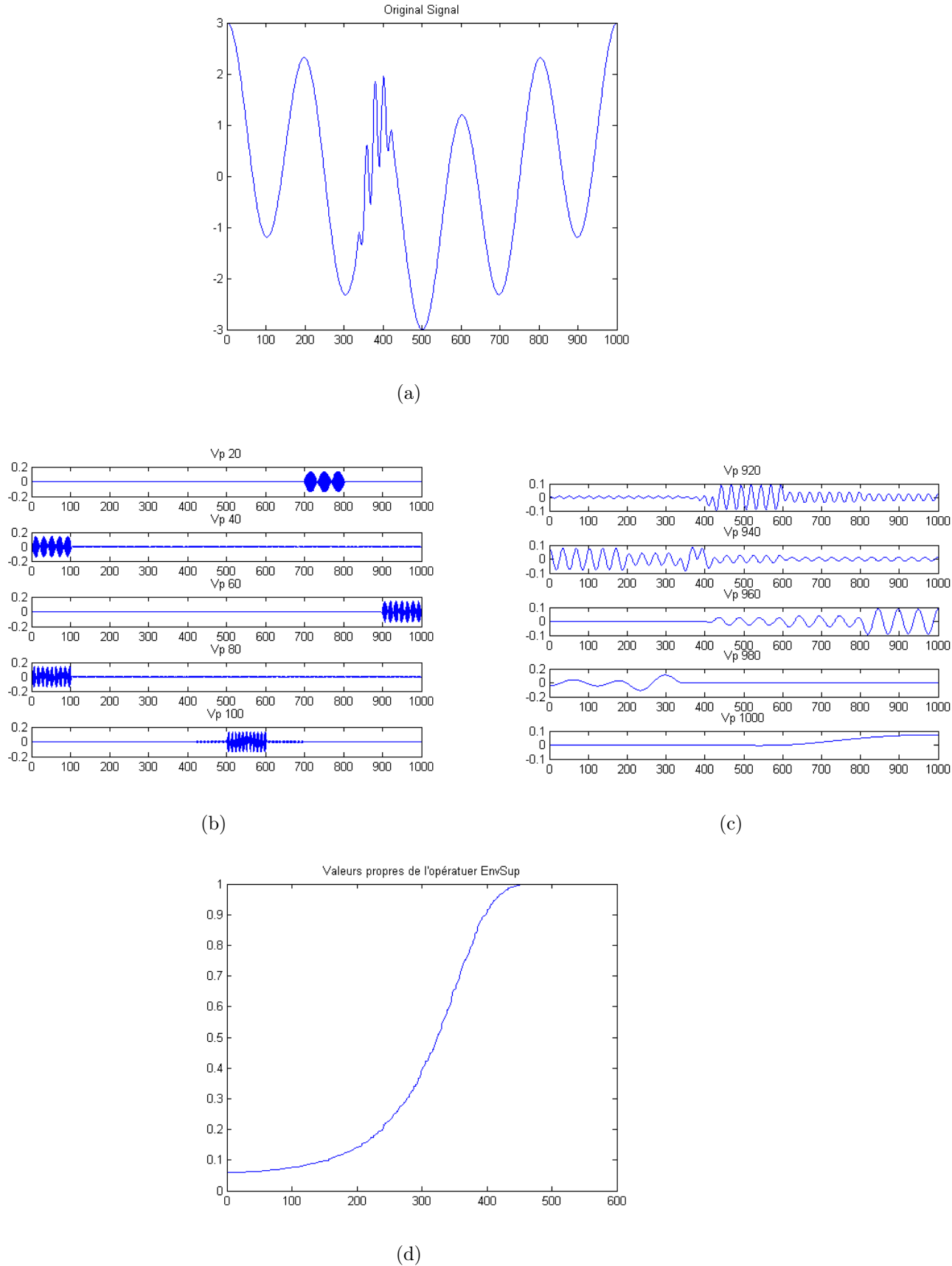
Dans la figure 7.3 nous avons calculé l'énergie de chaque *SPMF* en chaque point du signal que nous avons représenté dans un plan de type temps-fréquence. En nous référant au signal original tracé en haut de la figure, nous pouvons voir la contribution en fréquence locale de chaque *SPMF* et plus clairement aux alentours de l'intermittence.

### 7.4.4 Interprétation de la décomposition *SID*

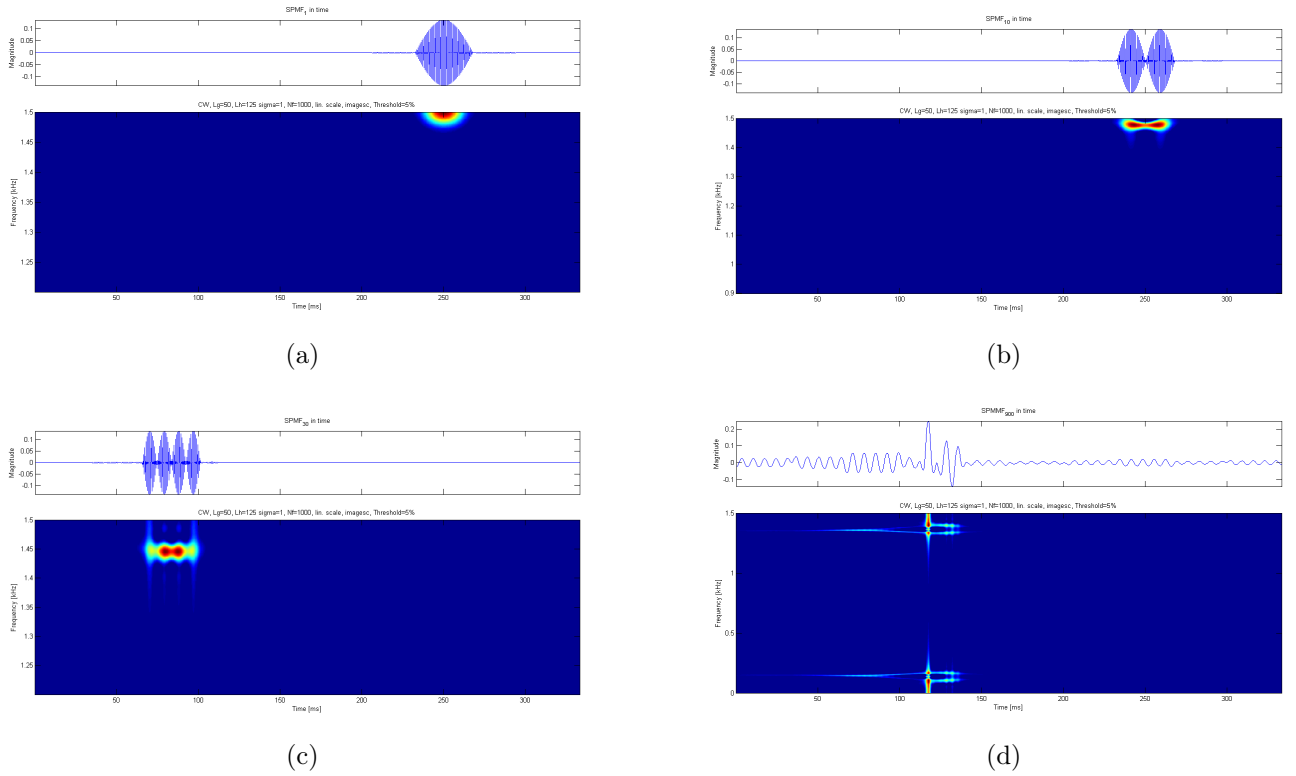
On peut également interpréter cette décomposition dans le cas de l'étude de données multicomposantes. Les principaux vecteurs propres - autrement dit les *SPMFs* - représentent les différentes composantes atomiques qui interviennent dans la composition globale du signal. Les différentes valeurs propres  $\lambda_n$ ,  $1 \leq n \leq N$ ,  $N$  étant la taille du signal, sont alors analogues à l'énergie ou la représentativité qui va pondérer ces comportements. On peut considérer, par exemple dans l'optique du data mining, que les informations importantes de l'ensemble sont celles qui présentent une structure plus marquée. Alors, en annulant les valeurs propres  $\lambda_n$  au-delà d'un certain indice, puis en passant à la reconstruction, on obtient une version filtrée du signal de départ, représentant l'information dominante. De façon équivalente, on peut supprimer des données d'énergie inférieure à un certain seuil. Ces principes pourront bien justifier les applications de la Décomposition Spectrale Intrinsèque au débruitage, à la compression de même qu'à la classification et à la reconnaissance de formes. Ainsi, la *SID* permet de construire un modèle empirique, sans théorie sous-jacente, d'autant plus précis qu'on y injecte des termes. Il est par ailleurs possible de reconstruire le signal, en utilisant une base de *SPMFs* plus ou moins complète afin d'obtenir un résultat plus ou moins précis.

## 7.5 Conclusion

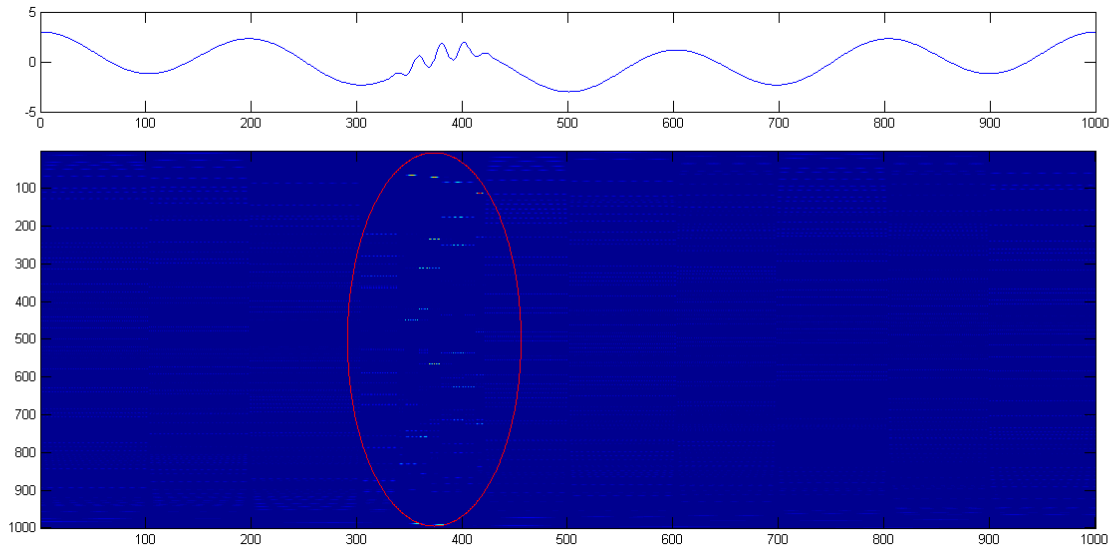
Nous avons introduit dans ce chapitre une nouvelle méthode de décomposition basée sur une décomposition spectrale d'un opérateur d'interpolation intrinsèque d'un signal. La nouvelle méthode appelée *Décomposition Spectrale Intrinsèque*, - en anglais *Spectral Intrinsic Decomposition (SID)* - est auto-adaptative et est plus générale dans un certain sens que le principe de base de la Décomposition Modale Empirique. La méthode SID permet de produire un dictionnaire de *Fonctions Modes Spectrales Propres*, en anglais *Spectral Proper Mode Function (SPMF)* qui sont semblables à des atomes dans les représentations parcimonieuses. Les résultats des tests montrent que le *SID* peut être utilisé dans le débruitage du signal dans la même mesure que la méthode des ondelettes, avec l'avantage de l'auto-adaptabilité. Le *SID* est également adapté pour la compression du signal, ainsi que pour d'autres applications.



**FIGURE 7.1** — Signal d'entrée en (a), des vecteurs propres en (b) et (c). Un résultat semblable est obtenu avec l'opérateur enveloppe inférieure. En (d) Les valeurs propres toutes contenues dans le segment  $[0, 1]$  et supérieures à  $1/17$ .



**FIGURE 7.2** — Les *SPMFs* 1 en (a), 10 en (b), 30 en (c) et 40 en (d) avec leurs représentations dans le plan temps-fréquence. Nous avons une bonne localisation fréquentielle des *SPMFs*, ce qui justifie de la qualité d'atomes temps-fréquence de la méthode *SID*.



**FIGURE 7.3** — Représentation de l'énergie de chaque *SPMF* en chaque point du signal dans un plan de type temps-fréquence.

# Décomposition Spectrale Intrinsèque et applications

## Sommaire

---

<b>8.1 Introduction</b>	<b>117</b>
<b>8.2 Décomposition-reconstruction du signal</b>	<b>118</b>
<b>8.3 Méthode itérative de débruitage par <i>SID</i></b>	<b>119</b>
8.3.1 Théorème de Donoho - Johnstone	121
8.3.2 Seuil de <i>Donoho</i> appliqué au débruitage par <i>SID</i>	121
<b>8.4 Débruitage par seuillage sur les <i>SPMFs</i></b>	<b>122</b>
<b>8.5 La méthode <i>SID</i> appliquée aux images</b>	<b>130</b>
8.5.1 L'algorithme <i>SID version 2D</i>	130
8.5.2 Extraction de structures significatives d'images par la méthode <i>SID 2D</i>	130
<b>8.6 Conclusion</b>	<b>135</b>

---

## 8.1 Introduction

La décomposition spectrale intrinsèque peut être considérée comme une forme généralisée de la décomposition modale empirique. Elle fournit des composantes élémentaires, les *SPMFs* qui renferment chacune, des informations fréquentielles présentes dans le signal à décomposer. Comme l'*EMD*, nous pouvons constater que les premiers *SPMFs* renferment les composantes hautes fréquences du signal à décomposer tandis que les derniers *SPMFs* renferment les composantes basses fréquences. Cette similarité nous pousse à tester les applications qui se faisaient avec l'*EMD* et les ondelettes en utilisant cette



fois ci notre nouvelle méthode *SID*. Les résultats obtenus sont assez satisfaisants pour des applications comme la reconstruction et le débruitage de signaux.

## 8.2 Décomposition-reconstruction du signal

La qualité du résultat de la représentation d'un signal donné par la décomposition en ondelettes dépend à la fois du choix de l'ondelette mère et du niveau de décomposition  $N_L$ . Il est possible d'effectuer un filtrage du signal en appliquant un seuillage dur ou doux sur les coefficients calculés à chaque niveau de décomposition de 1 à  $N_L$ . Par contre, avec la méthode *SID*, nous pouvons avoir des résultats parfois meilleurs, qui s'adaptent à toutes les classes de signaux, sans avoir à se préoccuper du choix d'une base ou d'un niveau de décomposition. Dans la suite, nous proposons une nouvelle méthode de reconstruction et de filtrage tout en faisant une comparaison entre les résultats donnés par différents choix de bases d'ondelettes et les résultats donnés par la méthode *SID*. Il existe deux approches de filtrage qui peuvent être explorées ici pour les résultats des tests. La première consiste à prendre la décomposition en ondelettes du signal et de garder les plus grands coefficients en valeur absolue. Dans ce cas, on peut fixer un seuil global et évaluer la performance par le rapport signal sur bruit (*SNR*) ou l'erreur quadratique relative de reconstruction. Ainsi, un seul paramètre est mis en jeu. La seconde approche consiste à déterminer visuellement un seuil dépendant du niveau de décomposition. Dans l'algorithme 6, nous avons décrit la méthode de reconstruction par *SID* comme suit : pour avoir la décomposition *SID* d'un signal  $S_0$ , nous calculons d'abord l'ensemble des coefficients de reconstruction par  $C = L_E V_E^{-1} s_0^\top$  et nous conservons tous les *SPMFs* correspondant aux valeurs propres 1 de l'opérateur enveloppe  $E$  qui donnent les *SPMFs* indispensables dans la représentation *SID* de  $S_0$ , désignés par  $C_m$ . Après, comme dans la reconstruction ou la méthode de filtrage par la décomposition en ondelettes, nous fixons le nombre de *SPMFs* supplémentaires - en estimant  $C_s$  - à ajouter à l'ensemble des *SPMFs* indispensables retenus auparavant. Deuxièmement, nous reconstruisons une version approximative filtrée de  $S_0$  en constituant les coefficients de reconstruction :

$$C_R = [C_M \ C_S] \quad (8.1)$$

et en complétant par des zéros pour retrouver la taille de la matrice. Dans [NDL10] une méthode optimale pour composer  $C_s$  par la technique de régularisation est proposée. La version du signal reconstruit est

$$S_C = V_E C_R. \quad (8.2)$$

Enfin nous calculons le rapport signal sur bruit (*SNR*) et le nombre de points ou le nombre de *SPMFs* retenus pour la reconstruction du signal. Dans les exemples présentés dans les figures 8.1(a), 8.1(b), 8.2(a), 8.2(b), 8.2(c) et 8.2(b) on applique un filtrage global, pour un choix d'ondelette donné et non optimisé, afin de produire une reconstruction presque parfaite d'un signal et de le comparer avec la version *SID*. Pour la reconstruction du signal 3, la composante haute fréquence est perdue par la méthode d'ondelettes alors que la reconstruction par *SID* conserve presque parfaitement toutes les composantes essentielles. Nous pouvons clairement voir et mesurer dans les figures 8.4(a), 8.4(b), 8.4(c), 8.4(d), 8.5(a) et 8.5(b) que la reconstruction par la méthode *SID* fonctionne mieux que la méthode classique des ondelettes avec une plus petite erreur de reconstruction et donne un meilleur rapport signal sur bruit. Un autre avantage de la méthode de reconstruction par *SID* est son auto-adaptabilité et sa dépendance au signal uniquement. Pour comparer les résultats de ces méthodes, nous calculons l'énergie retenue en pourcentage défini par :

$$-20 * \log_{10} \left( \frac{\|S_C - s_0\|}{\|s_0\|} \right) \quad (8.3)$$

et nous devons comparer le pourcentage du nombre de points utiles pour la reconstruction du signal, voir la figure 8.4(a).

---

**Algorithm 6** : SIGNAL RECONSTRUCTION WITH *SID* APPROACH
 

---

- 1: **compute** matrix operator  $L^{-1} = E$  (6.18)
- 2: **perform** eigendecomposition of  $E$ ,  
 $[V_E, L_E] = \text{eig}(E)$
- 3: **compute** reconstruction coefficients of  $s_0$ ,  $C = L_E V_E^{-1} s_0^\top$
- 4: **find** retained significant eigenvectors associated to eigenvalue equal to 1,  $C_m$
- 5: **fix** the number of supplementary eigenvectors to add  $C_s$
- 6: **find** retained significant eigenvectors  $C_R = [C_m C_s]$
- 7: **compute reconstructed signal**  
 $S_c \leftarrow V_E C_R$

▷ Results

$$\text{and } s_0 \leftarrow \sum_{k=1}^N V_k * C_k$$


---

### 8.3 Méthode itérative de débruitage par *SID*

En s'inspirant sur les méthodes de débruitage par ondelettes pour la plupart proposée par *Donoho et al* (voir [DJ94, DJ95, DJKP95, Don95]), nous pouvons adopter un processus similaire afin de supprimer les petites fluctuations à partir des *SPMFs* résultant de la décomposition spectrale intrinsèque d'un signal bruité. Alors que le débruitage par ondelettes dépend du choix de la base d'ondelettes ou de l'ondelette mère, le *SID*

est adaptatif et généralement, la dynamique du bruit dans le signal est donnée par les *SPMFs* correspondant aux valeurs propres les plus élevées. Le principe du débruitage par seuillage itératif des *SPMFs* résultant de la décomposition spectrale intrinsèque d'un signal que nous avons récemment proposé dans [NTG<sup>+</sup>12b] vient de cette hypothèse et crée une version lissée des données traitées par ces trois étapes suivantes : *analyse* - *seuil* - *synthèse*. Cette nouvelle méthode de débruitage qui fournit pour certains signaux de meilleurs résultats que celle utilisant les ondelettes est bien décrite dans l'algorithme 7. Ce qui justifie ces performances, c'est le fait que la méthode *SID* est autoadaptative et procure des composantes *SPMF* qui localisent bien la répartition fréquentielle du signal. Premièrement, nous calculons la décomposition *SID* d'un signal bruité donné en entrée, ensuite nous choisissons tous les composants correspondant à des valeurs propres *SPMFs* égales à 1 qui donne la première échelle du signal restaurée - *par exemple*  $\hat{s}_1$  - ; après, pour le second niveau du processus de débruitage, nous enrichissons  $s_1$  en considérant toutes les valeurs propres du tiers médian, différentes de 1, - *par exemple*  $L_{med}$  - et on recompose maintenant avec le nouveau signal d'entrée.

$$s_{p=1} = \sum_{k \in \{j/\lambda_j=1\}} V_k * C_k + \sum_{k \in L_{med}} V_k * C_k. \quad (8.4)$$

Cette procédure peut être répétée au niveau  $p = p + 1$  : Si nous avons besoin de plus de filtrage, nous pouvons contrôler l'estimation du *SNR* *Signal-to-Noise-Ratio* : Pour cela, nous considérons  $\hat{s}_p$  comme le nouveau signal d'entrée, et on répète le même processus que celui décrit dans l'algorithme 7. On obtient ainsi un processus de débruitage *multi-échelle* avec une séquence ( $\hat{s}_p$ ) des versions filtrées du signal bruité  $s_0 = s$  : Le choix de  $L_{med}$  est empirique, mais peut être optimisé par une régularisation [NDL10].

---

**Algorithm 7** : DENOISING BY ITERATIVE SID THRESHOLDING

---

- 1: **Choose**  $p$ , the filtering level,  $SNR_c$  and  $\epsilon$  as a target precision ▷ *Initialization*  
 $m = 1$ ;  $\hat{s}_m = s$ ;  $N = length(s)$ ;  
**REPEAT**
  - 2: **Decompose** the noisy data  $s_0$  into the *SPMFs* ▷ *Analysis*  
 $SPMF_k(k = 1..N) \leftarrow SID(s)$
  - 3: **Compute** denoised signal at level  $m$   $\hat{s}_m$  of  $s$  ▷ *Synthesis*  
 $S_0 \leftarrow \sum_{k \in \{j/\lambda_j=1\}} V_k C_k$
  - 4: **Compute** the *SRN*
  - 5: **Add** to  $S_m$  the *SPMFs* corresponding to the median third values of  $L_{med} = \{k/\lambda_k = 1\}$  in the *SID* decomposition. ▷ *Enrichment*
  - 6:  $s \leftarrow s_m + \sum_{k \in L_{med}} V_k C_k$
  - 7:  $m = m + 1$
- UNTIL**  $m = p$  or  $SNR - SNR_c \leq \epsilon$
-

Cette nouvelle méthode que nous venons de présenter est inspirée des méthodes de débruitage par seuillage des coefficients d'ondelette et elle donne des résultats assez satisfaisants sur une large gamme de signaux. Cependant le problème qui reste posé est de déterminer d'une manière automatique le seuil adéquat et définir un critère d'arrêt pour assurer la convergence de l'algorithme. Le seuillage, comme nous venons de le voir, peut être considéré comme une technique d'estimation d'un signal. Il y a à peine une dizaine d'années, Donoho et Johnstone ont fait une percée fondamentale en montrant que des estimateurs par seuillage avaient un risque proche de la borne inférieure [Ste81].

### 8.3.1 Théorème de Donoho - Johnstone

On fait l'hypothèse que le bruit est un bruit blanc gaussien de variance  $\sigma^2$ . Donoho et Johnstone ont alors montré que le risque induit par un seuillage sur les coefficients d'ondelettes pouvait être encadré par des valeurs proches de la borne inférieure obtenue avec des estimateurs d'oracle. Notons  $r_p(f) = \sum_{m=0}^{N-1} \min(|f_B[m]|^2, \sigma^2)$  le risque obtenu avec un estimateur d'oracle (c'est à dire un estimateur construit connaissant le signal recherché), et  $r_t(f)$  le risque obtenu par un seuillage de seuil  $T$ .  $N$  est la taille du signal.

**Théorème 8.3.1** *Soit  $T = \sigma\sqrt{2\log_e(N)}$ , le risque  $r_t(f)$  d'un seuillage dur ou doux vérifie pour tout  $N$  supérieur ou égal à 4 :  $r_p(f) \leq r_t(f) \leq (2\log_e(N))(\sigma^2 + r_p(f))$ . Le facteur  $2\log_e(N)$  est optimal parmi les estimateurs diagonaux dans la base d'ondelettes.*

La variance  $\sigma^2$  du bruit est obtenue à partir de la valeur médiane des valeurs absolues de ces coefficients. On pourrait également montrer que le maximum de l'amplitude du bruit a une très forte probabilité d'être juste en dessous de  $T = \sigma\sqrt{2\log_e(N)}$ , ce qui explique pourquoi le théorème choisit cette valeur. D'autre part, le fait que le seuil augmente avec la taille du signal est dû à la distribution gaussienne qui crée des coefficients de bruits de plus en plus grands lorsque le nombre de coefficients augmente.

### 8.3.2 Seuil de Donoho appliqué au débruitage par SID

Puisque notre méthode de débruitage est comparable à la méthode des ondelettes, nous avons appliqué le seuil de Donoho  $T = \sigma\sqrt{2\log_e(N)}$  au débruitage par SID avec des résultats assez satisfaisants. Si  $M$  est la valeur médiane des coefficients, alors on peut montrer que  $E\{M\} = 0,6745\sigma$ . On peut donc estimer  $\sigma$  par  $\hat{\sigma} = \frac{M}{0,6745}$ . L'algorithme de débruitage par SID optimisé est alors défini dans l'algorithme 8 :

---

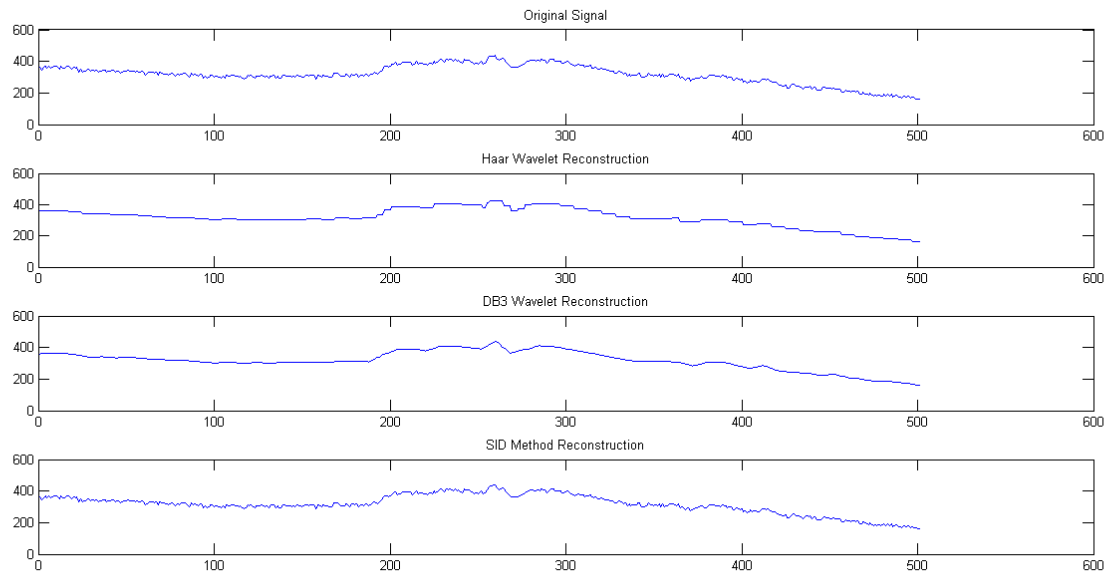
**Algorithm 8** : DÉBRUITAGE par SEUILLAGE des COEFFICIENT SID
 

---

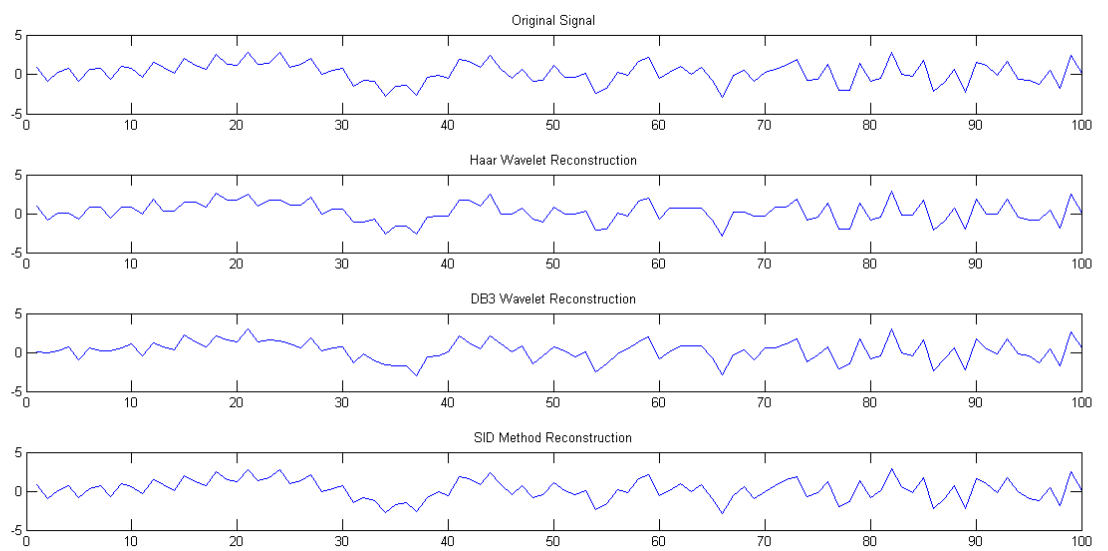
- 1: **Décomposer** le signal en *SMPs*.
  - 2: **Calculer** les coefficients de la décomposition :  $C = L_E V_E^{-1} s_0^\top$ .
  - 3: **Déterminer** le seuil  $T = \sigma \sqrt{2 \log_e(N)}$  avec  $\sigma = \frac{M}{0,6745}$ .
  - 4: **Annuler** tous les coefficients qui ont une valeur absolue inférieure à  $T$ .
  - 5: **Recomposer** pour trouver le signal débruité.
- 

## 8.4 Débruitage par seuillage sur les *SPMFs*

Comme nous l'avons vu avec les valeurs propres et les coefficients *SID*, il est aussi possible de faire du débruitage en seuillant sur les vecteurs propres - *c'est-à-dire les SPMFs* -. Nous utiliserons le même principe que précédemment pour déterminer les parties du signal à garder. Ce qui est intéressant ici, c'est que nous n'allons pas annuler des *SPMFs* en entier mais seulement les valeurs prises par le vecteur *SPMF* inférieures au seuil calculé. Ensuite on passe à la reconstruction pour retrouver le signal débruité.

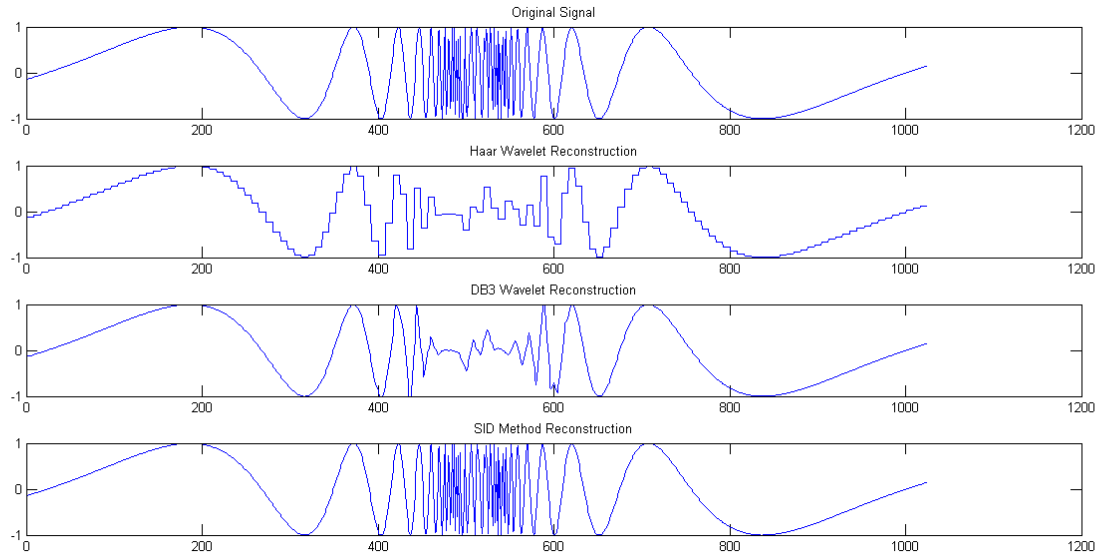


(a)

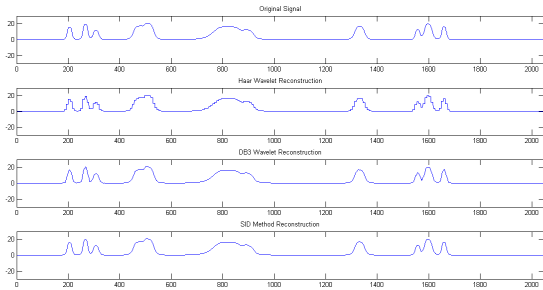


(b)

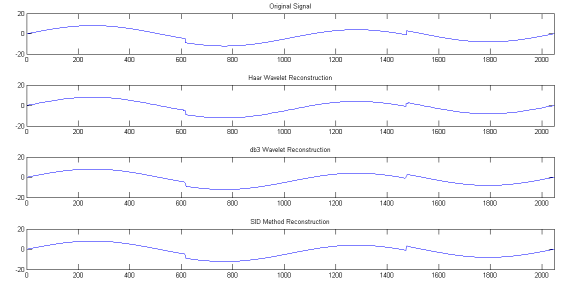
**FIGURE 8.1** — Comparaison de la reconstruction par la méthode *SID* sur des signaux test 1 en (a), 2 en (b) avec des méthodes basées sur la décomposition en ondelettes.



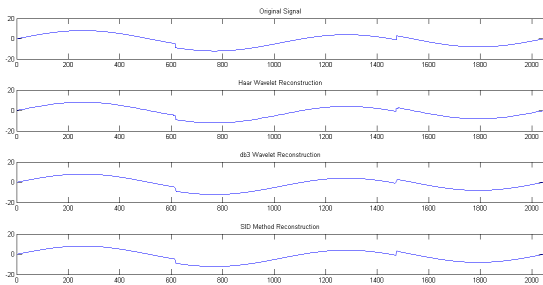
**FIGURE 8.2** — Comparaison de la reconstruction par la méthode *SID* sur le signal test 3 avec des méthodes basics basées sur la décomposition en ondelettes.



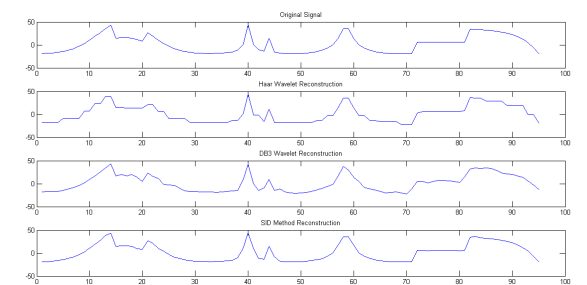
(a)



(b)



(c)



(d)

**FIGURE 8.3** — Comparaison de la reconstruction par la méthode *SID* sur des signaux test 1 en (a), 2 en (b), 3 en (c) et 4 en (d) avec des méthodes basics basées sur la décomposition en ondelettes.

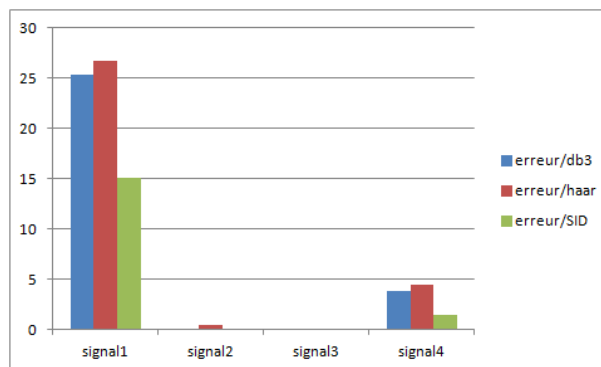
	Wavelets reconstruction						Reconstruction by SID		
	Length	Threshold	Error/db3	Error/Haar	PSNR/Haar	PSNR/db3	Number added Vp	Error/SID	PSNR/SID
Signal 1	501	30	25.3841	26.7309	32.8918	33.1163	100	15.1394	38.3007
Signal 2	100	1	0.0727	0.46	12.9011	10.9169	25	0.0146	17.8929
Signal 3	1024	30	0.0317	0.0357	8.1013	8.6235	300	5.19E-04	26.4784
Signal 4	95	10	3.8051	4.41248	16.1294	16.4798	50	1.422	20.7545

(a)

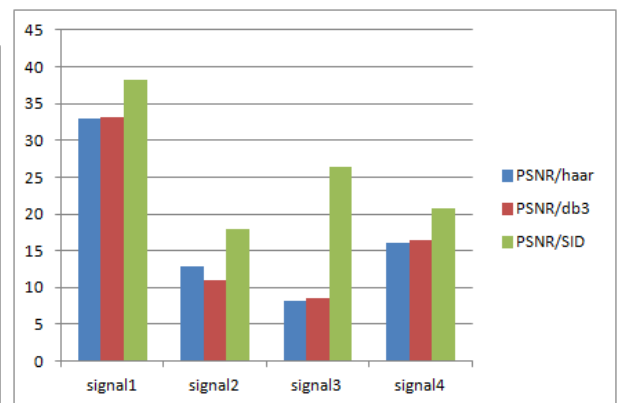
	Wavelets reconstruction		Reconstitution by SID
	Error/db3	Error/Haar	Error/SID
Signal 5	0.0276	0.2881	4.33E-05
Signal 6	0.006	0.0124	0.0031
Signal 7	0.1001	0.2453	5.62E-04

	PSNR/Haar	PSNR/db3	PSNR/SID
Signal 5	19.314	29.5071	57.5439
Signal 6	31.9394	35.1173	38.0023
Signal 7	18.7734	22.6643	45.1722

(b)

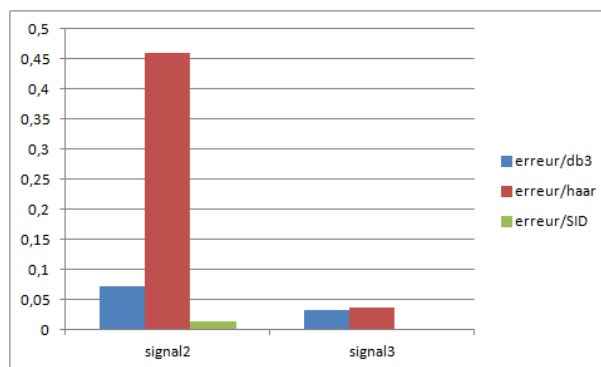


(c)

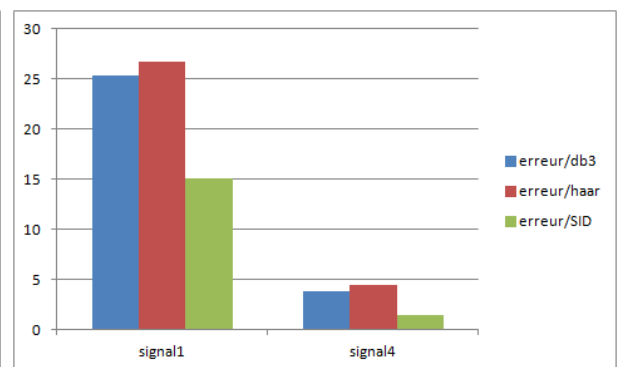


(d)

**FIGURE 8.4** – Tableaux comparatifs des résultats montrant les performances de la méthode *SID* en (a) et (b), les erreurs de reconstruction des différentes méthodes en (c) et en (d) les rapports signal sur bruit.



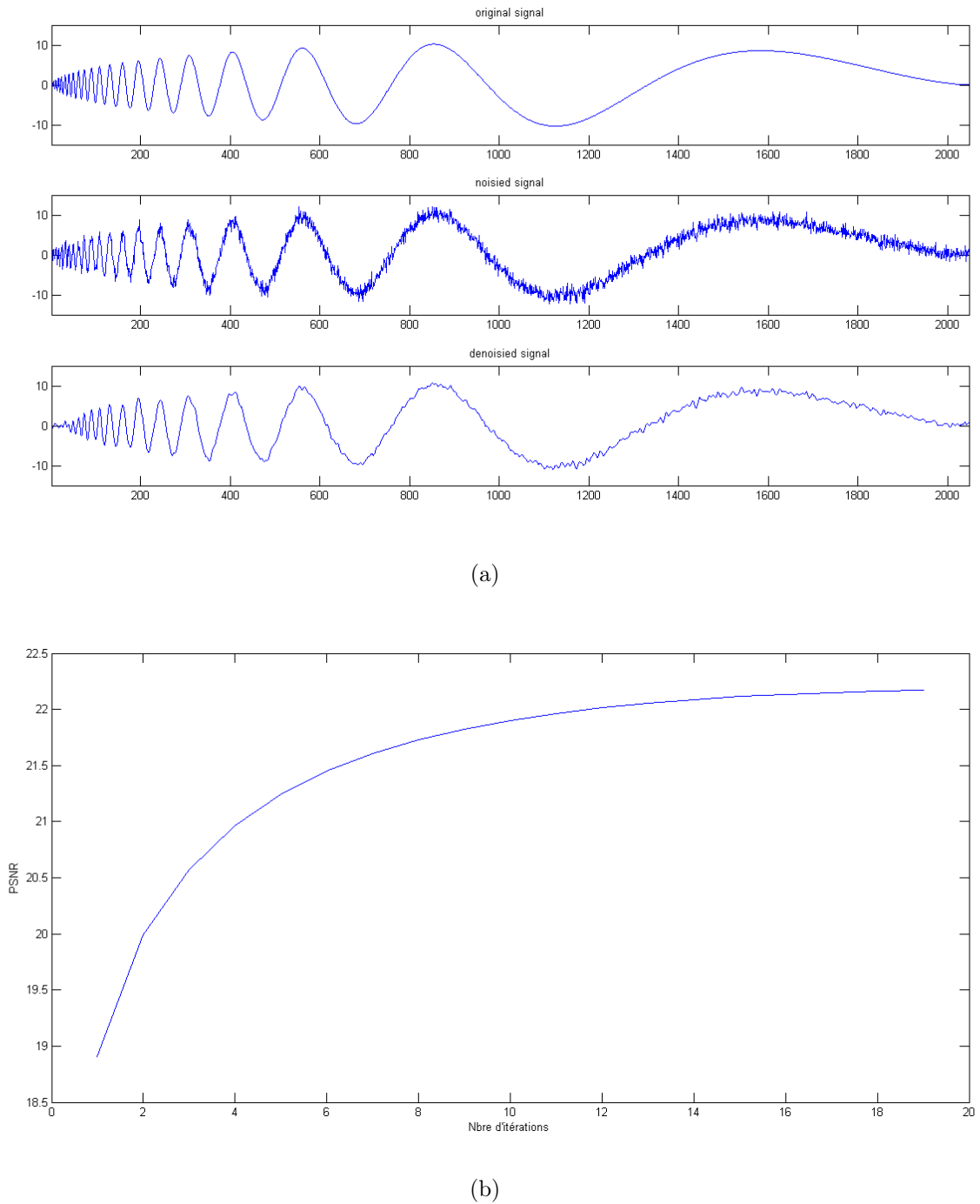
(a)



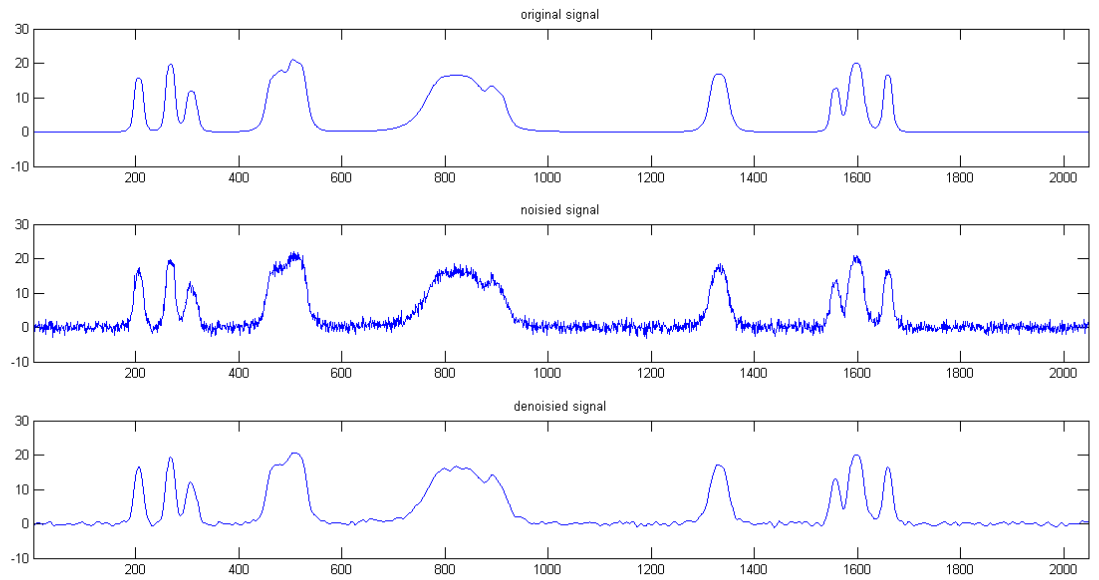
(b)

**FIGURE 8.5** – Différentes échelles de représentation pour une visualisation plus claire de la comparaison des erreurs de reconstruction entre la méthode *SID* et les méthodes usuelles basées sur les ondelettes.

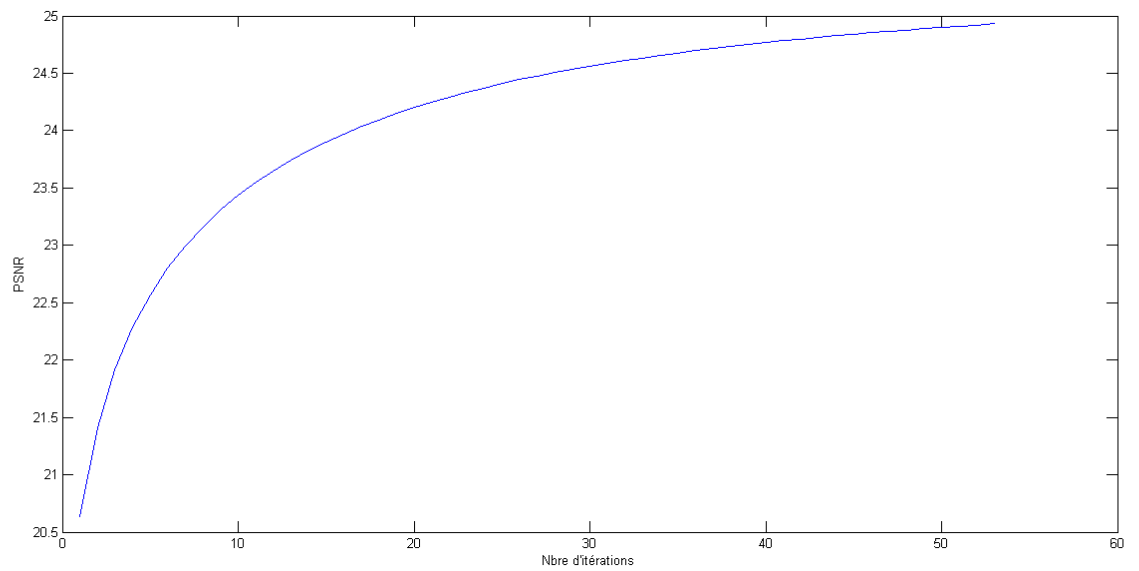




**FIGURE 8.6** — En (a), de haut en bas, le signal test 1, le signal bruité et le signal débruité. En (b), l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations.

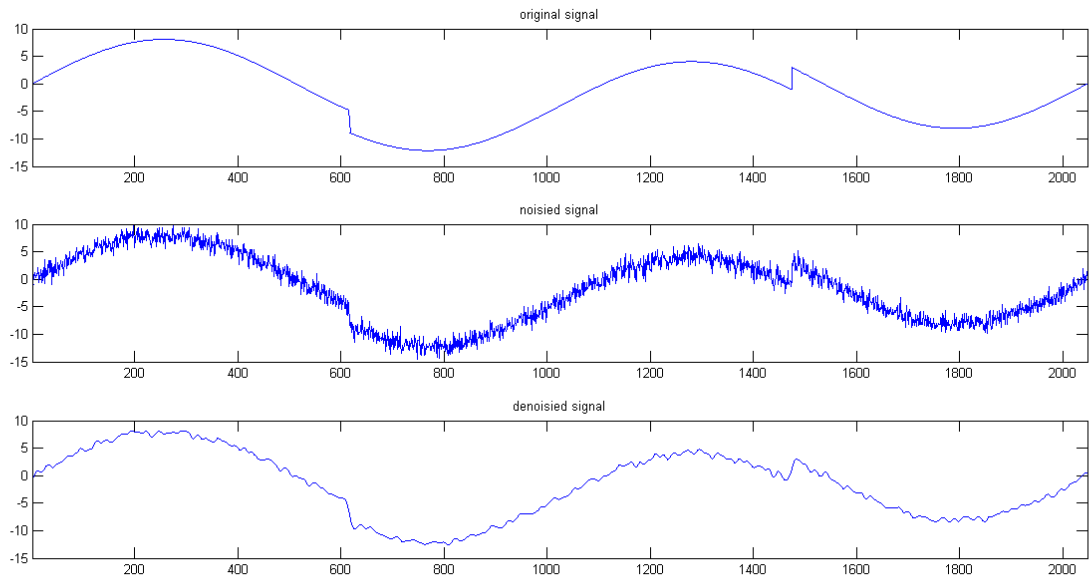


(a)

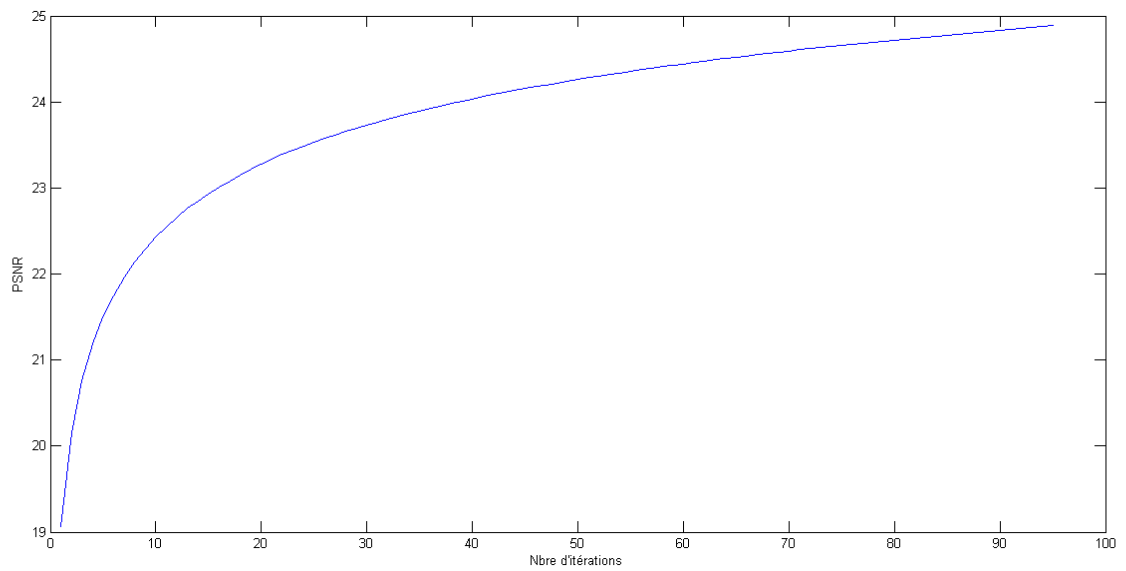


(b)

**FIGURE 8.7** — En (a), de haut en bas, le signal test 2, le signal bruité et le signal débruité. En (b), l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations.

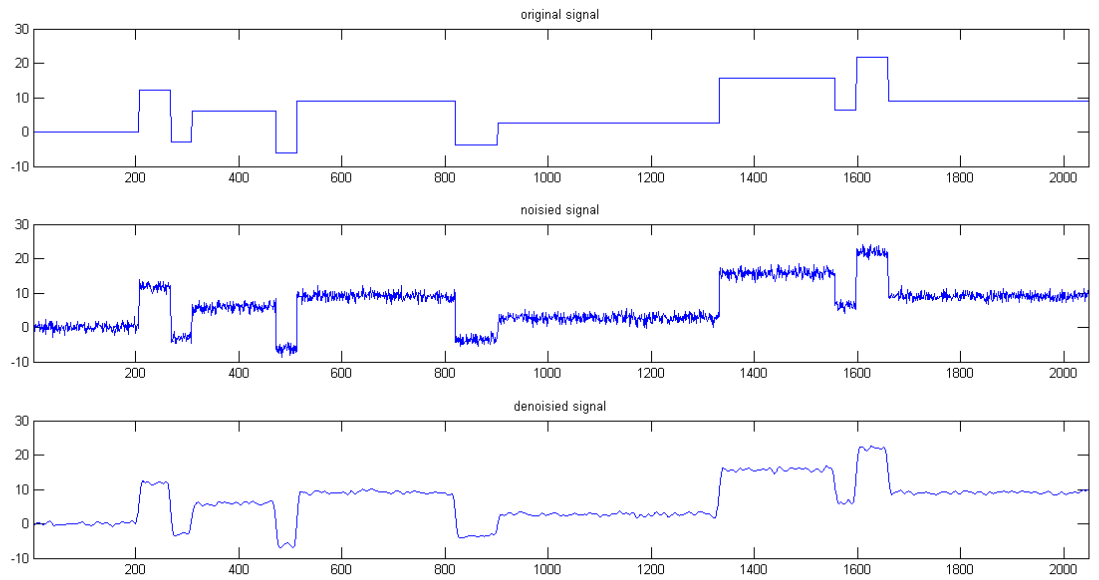


(a)

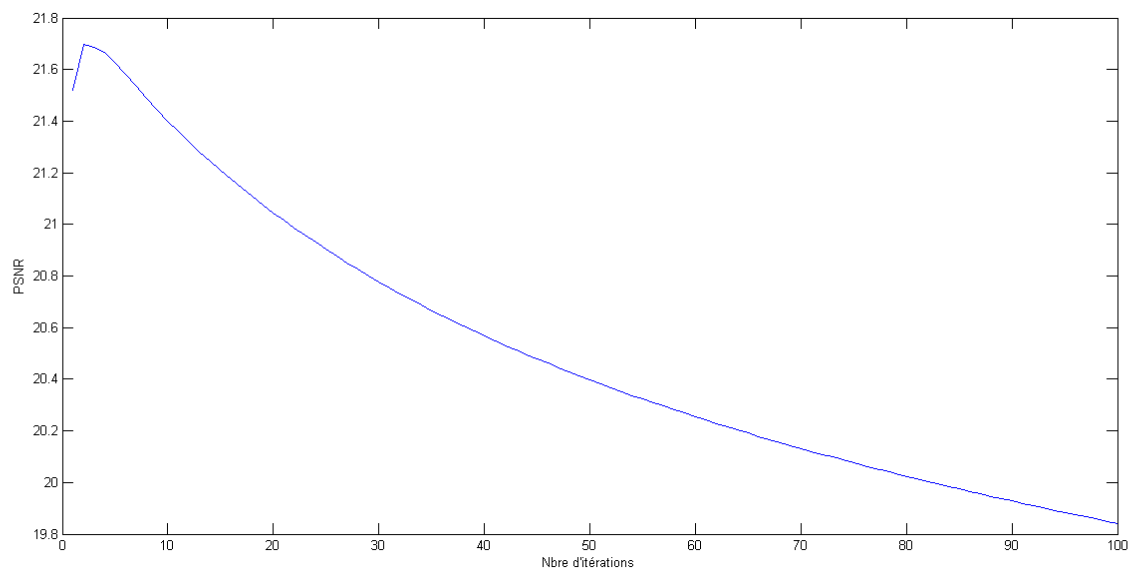


(b)

**FIGURE 8.8** — En (a), de haut en bas, le signal test 3, le signal bruité et le signal débruité. En (b), l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations.



(a)



(b)

**FIGURE 8.9** — En (a), de haut en bas, le signal test 4, le signal bruité et le signal débruité. En (b), l'évolution du rapport signal sur bruit au cours des itérations.

## 8.5 La méthode *SID* appliquée aux images

La Décomposition Spectrale Intrinsèque s'est actuellement bien positionnée parmi les méthodes d'analyse temps fréquences les plus connues. Divers travaux ont été menés dans le cadre de signaux *1D* et ont obtenu des résultats très probants notamment dans les domaines comme la restitution et le débruitage du signal. En effet, les enjeux liés au traitement d'images sont actuellement primordiaux. Plus précisément, l'extraction de caractéristiques et la reconnaissance de formes, que ce soit dans le domaine de la guerre des mines ou celui de la lutte anti-pollution, tient aujourd'hui une place centrale.

### 8.5.1 L'algorithme *SID* version *2D*

Pour une extension *2D* de la méthode *SID* appliquée à une image en niveaux de gris, la première approche consiste à considérer une image comme une matrice et d'en faire une décomposition *SID* ligne par ligne. Pour la recomposition de l'image, il suffit de reprendre le même mécanisme suivant les lignes avant de reconstituer la matrice image. Ainsi, l'algorithme *SID 2D* est décrit dans *Algorithme 9*.

---

**Algorithm 9** : BIDIMENSIONAL SPECTRAL INTRINSIC DECOMPOSITION ALGORITHM

---

```

1:  $M \leftarrow$  transform image to data
2:  $NL \leftarrow$  number of lines of  $M$ 
3:  $NL \leftarrow$  number of lines from  $M$ 
4:  $NC \leftarrow$  number of columns from  $M$ 
5:  $M_R \leftarrow NL$  by  $NC$  zeroed matrix
6: for  $i = 1 \leftarrow NL$  do
   $s_i \leftarrow$  line  $i$  of  $M$ 
  compute  $g_i^+$  from  $s_i$ 
  compute  $E_i$ 
  decompose  $E_i$ ,  $[V_{E_i}, L_{E_i}] \leftarrow eig(E_i)$ 
  compute  $C_i$ ,  $C_i = L_{E_i} V_{E_i}^{-1} s_i^\top$ 
7:   for  $j = 1 \leftarrow NC$  do
     $M_R(i, j) \leftarrow V_i(j) * C_i(j)$ 
  end for
end for
8: recompose image from  $M_R$ 

```

---

### 8.5.2 Extraction de structures significatives d'images par la méthode *SID 2D*

L'extraction de composantes d'images regroupe un ensemble de techniques permettant de prendre en compte les différents niveaux de gris présents dans une image en terme

d'intensité et de distribution dans le but de définir un certain nombre de paramètres caractéristiques d'un ensemble d'éléments significatifs de l'image à étudier. Ces composantes de l'image permettent d'exprimer des propriétés intéressantes de la surface de l'image. Les *SPMFs* issus de la décomposition spectrale intrinsèque fournissent une distribution des éléments de fréquence présents dans une image. Autrement dit, les *SPMFs* associés aux valeurs propres les plus petites représentent les basses fréquences alors que les *SPMFs* associés aux valeurs propres les plus grandes représentent les hautes fréquences. Ce qui fait que, en considérant juste un certain nombre de valeurs propres bien choisies, on peut extraire une partie qui nous intéresse dans l'image. La décomposition en sous-images pourrait alors être une étape très intéressante pour des applications comme l'analyse de textures, la segmentation, la classification qui sont très utilisées dans les domaines de la télédétection ou de l'imagerie médicale. Dans l'*algorithme* 10, nous décrivons comment, à partir de la méthode *SID*, nous pouvons extraire une ou des composantes d'une image donnée.

Dans les figures 8.10, 8.11, 8.12, nous montrons l'efficacité de la méthode d'extraction de composantes basée sur la décomposition spectrale intrinsèque. Les images Lena, Zebra Lion et Bird sont reconstituées en ne considérant d'abord que les *SPMFs* associés aux valeurs propres  $\lambda \in [0, 1]$ , puis les *SPMFs* associés aux valeurs propres  $\lambda \in [0.5, 0.7]$ . Ensuite la reconstitution est faite à partir des *SPMFs* associés aux valeurs propres  $\lambda < 1$ , puis les  $\lambda = 1$  et enfin tous les *SPMFs*, pour à chaque fois montrer la partie de l'image extraite.

---

**Algorithm 10** : IMAGES COMPONENTS EXTRACTION by THE SID METHOD
 

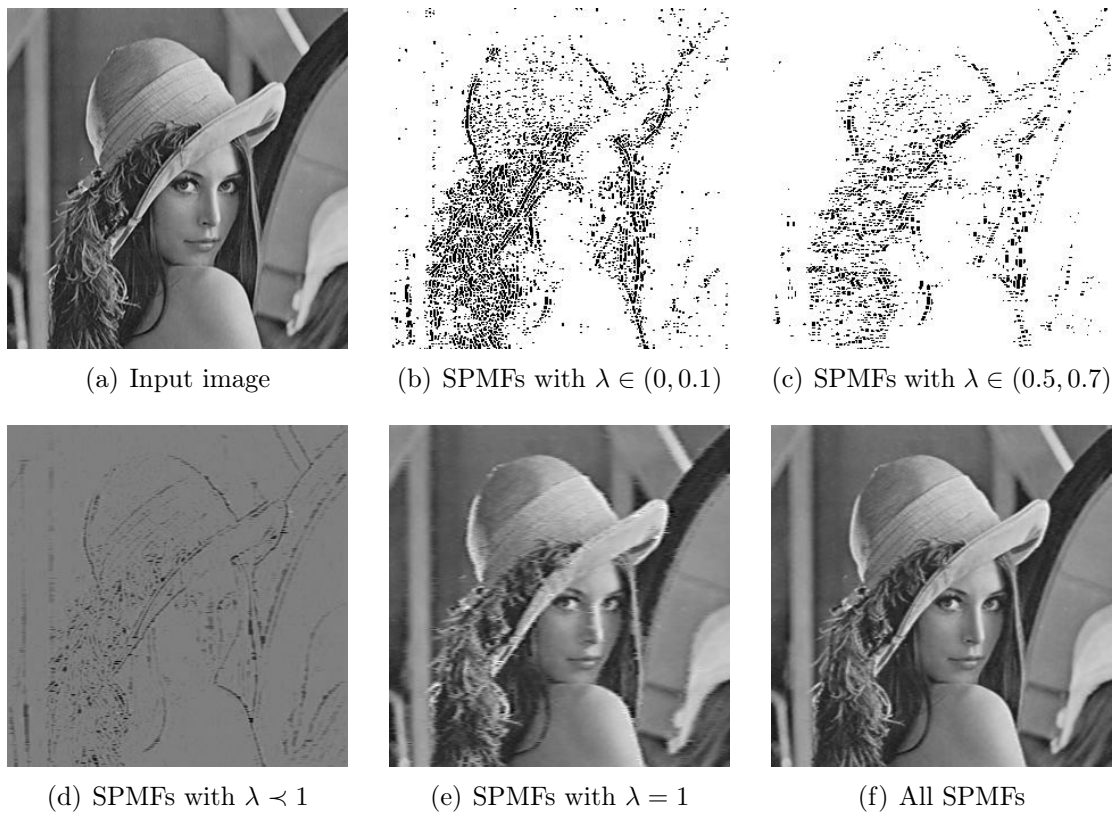
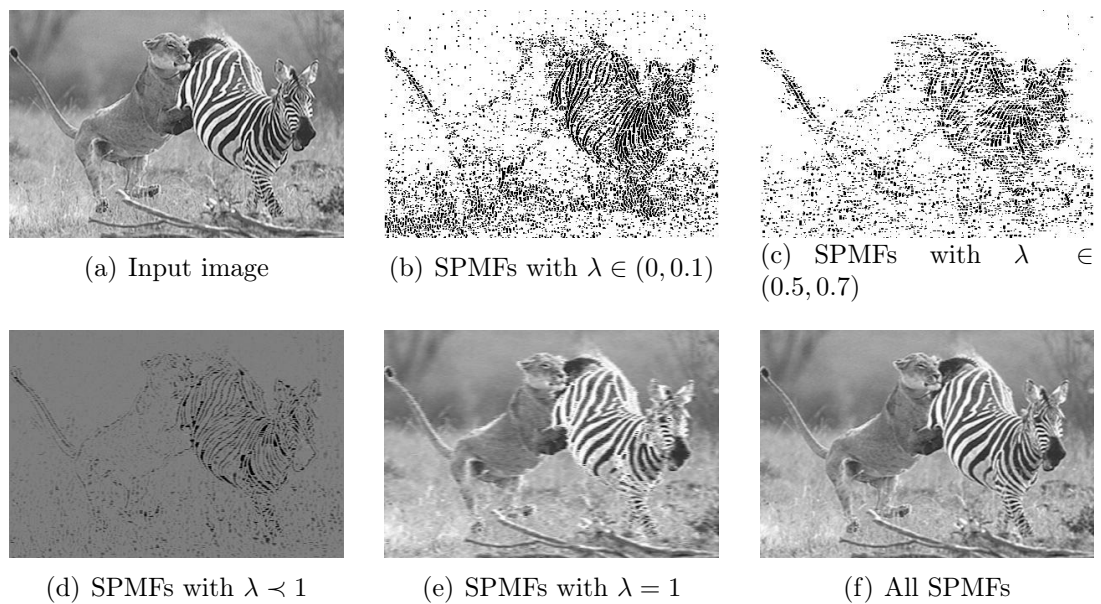
---

```

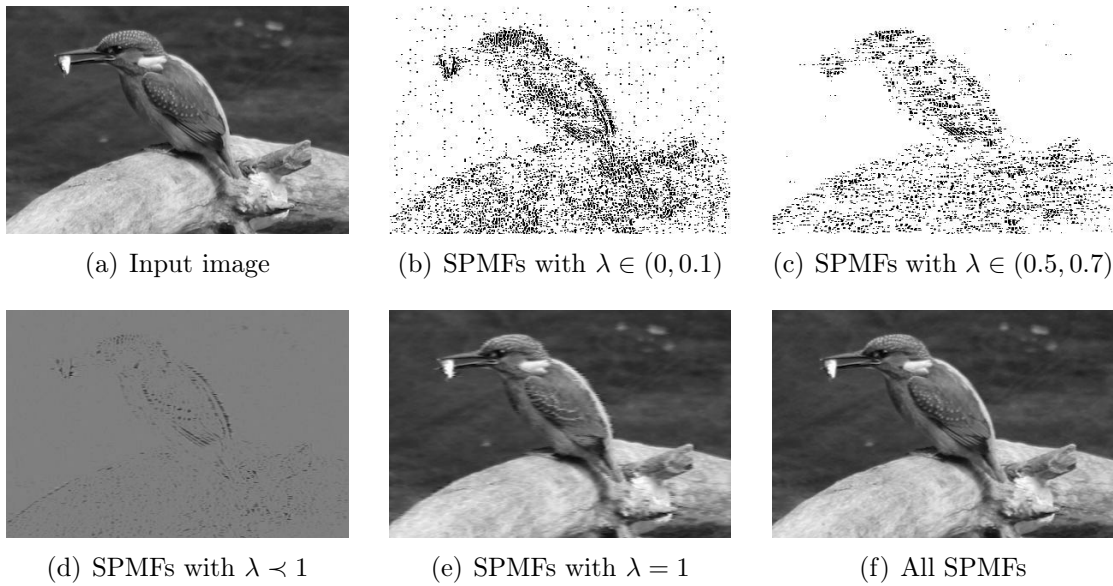
1:  $[\lambda_{min}, \lambda_{max}] \leftarrow$  eigenvalues interval to extract
2:  $M \leftarrow$  transform image to data
3:  $NL$  number of lines from  $M$ 
4:  $NC$  number of columns from  $M$ 
5:  $M_R \leftarrow NL$  by  $NC$  zeroed matrix
6: for  $i = 1 \leftarrow NL$  do
   $s_i \leftarrow$  line  $i$  of  $M$ 
  compute  $g_i^+$  from  $s_i$ 
  compute  $E_i$ 
  decompose  $E_i$ ,  $[V_{E_i}, L_{E_i}] \leftarrow eig(E_i)$ 
7:  $L_{R_i} \leftarrow L_{E_i}$ 
8:   for  $j = 1 \leftarrow NC$  do
9:     if  $L_{R_i}(j) \leq \lambda_{min}$  or  $L_{R_i}(j) \geq \lambda_{max}$ 
       then
          $L_{R_i}(j) \leftarrow 0$ 
       end if
     end for
     compute  $C_i$ ,  $C_{R_i} = L_{R_i} V_{E_i}^{-1} s_i^\top$ 
10:   for  $j = 1 \leftarrow NC$  do
      $M_R(i, j) \leftarrow M_R(i, i) + V_{E_i}(j) * C_{R_i}(j)$ 
   end for
  end for
11: recompose image from  $M_R$ 

```

---

**FIGURE 8.10** – Component extraction Lena.**FIGURE 8.11** – Component extraction Lion & Zebra.





**FIGURE 8.12** – Component extraction Bird.

## 8.6 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la méthode *SID* est bien adaptée à de nombreuses applications qui se faisaient auparavant avec la décomposition modale empirique et la transformée en ondelette. L'approche de débruitage consistant à un seuillage itératif des *SPMFs* donne des résultats assez satisfaisants. Comme pour l'*EMD*, la méthode de débruitage par *SID* est adaptative contrairement aux méthodes basées sur les ondelettes. Les résultats que nous avons représentés peuvent être étendus pour un signal à  $n$  dimensions voire des signaux du domaine complexe. Une version *SID 2D* est testée pour l'extraction de composantes sur plusieurs images. D'autres applications comme la compression, le débruitage et la segmentation sont envisageables.



## Conclusion Générale et Perspectives

DANS CETTE THÈSE, nous avons fait une étude détaillée des méthodes d'analyse temps-fréquence et temps-échelle, de l'analyse de Fourier à la transformée en ondelettes. Une attention particulière a été prêtée à la décomposition modale empirique (*EMD*) qui permet une décomposition auto-adaptative d'un signal en plusieurs composantes haute fréquence appelées *IMFs* et une composante basse fréquence appelé *résidu*, pour à la fin proposer une nouvelle méthode auto-adaptative qui fournit une décomposition du signal en composantes intrinsèques, appelée *Décomposition Spectrale Intrinsèque- SID pour Spectral Intrinsic Decomposition en anglais* -. De nombreux tests ont montré que cette nouvelle méthode est bien adaptée à la plupart des applications aussi bien en analyse qu'en traitement du signal.

Durant toutes ces années, l'analyse de Fourier a fait l'objet de très nombreuses études, grâce auxquelles un grand nombre d'outils sont à présent disponibles. De nombreuses analyses ont montré ses limites dès lors qu'elle ne donne pas une localisation temporelle de ses composantes fréquentielles souvent représentées par des pics dans le spectre du signal. Dans ce cas, la solution la plus simple serait de calculer les spectres instantanés pour chaque pas temporel du signal. Plusieurs méthodes existent et aucune ne prédomine sur l'autre. Leur utilisation va dépendre de l'application visée et des avantages et des inconvénients de chacune pour faire apparaître les informations recherchées. La *transformée de Fourier à fenêtre* constitue une alternative pour donner une localisation temporelle plus ou moins approchée des différents éléments de fréquence exprimés dans le signal. En particulier, la *FFT* est une analyse par bloc temporel qui suppose le signal échantillonné stationnaire sur toute la durée du bloc. Malheureusement, ces techniques ont de nombreuses limitations quand les signaux à analyser sont très *non-stationnaires*.

Au début des années 80, la transformée en ondelettes, très similaire à la transformée de Fourier - et encore plus à la transformée de Fourier locale - vient en appoint pour

tenter de combler certaines lacunes en offrant une meilleure précision du point de vue de la localisation temporelle des éléments fréquentiels contenus dans un signal. Il s'agit d'un algorithme permettant de calculer une représentation d'un signal en bandes de fréquences indépendantes. La différence principale est la suivante : la transformée de Fourier décompose le signal en sinus et en cosinus, c'est-à-dire en fonctions localisées dans l'espace de Fourier ; contrairement à la transformée en ondelettes qui utilise des fonctions localisées à la fois dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier.

La transformée en ondelettes est devenue en quelques années un sujet de recherche très débattu. On ne compte plus aujourd'hui les applications qui utilisent cette technique. Cette représentation est particulièrement utile pour le traitement d'images. Le choix de l'ondelette utilisée pour la décomposition temps-fréquence est le point le plus important. Celui-ci a une influence sur la résolution en temps et en fréquence du résultat. Nous ne pouvons modifier de cette manière les caractéristiques de la transformée en ondelettes - *les basses fréquences ont une bonne résolution fréquentielle mais une mauvaise résolution temporelle ; les hautes fréquences ont une bonne résolution temporelle et une mauvaise résolution fréquentielle* -, mais nous pouvons toutefois augmenter la résolution fréquentielle totale ou la résolution temporelle totale. Ceci est directement proportionnel à la largeur de l'ondelette utilisée dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier.

En dépit du grand nombre de succès qu'elle a pu rencontrer et de la diversité des applications qu'elle a trouvées, l'analyse par ondelettes est loin de nous donner une réponse universelle et finale au problème de représentation des signaux. Cependant, elle fournit souvent une réponse qui n'est pas très éloignée de la réponse optimale, ce qui, combiné à la grande simplicité de l'outil et sa grande efficacité algorithmique, explique son succès grandissant. En revanche, dans certains cas bien précis, il est nécessaire de rechercher des techniques permettant de s'approcher plus encore de l'optimalité, tout en essayant de conserver les atouts des ondelettes.

C'est dans cette optique que *N.E. Huang et al.* ont introduit dès 1998 la technique de Décomposition Modale Empirique - ou *EMD pour Empirical Mode Decomposition* - avec pour objectif de décomposer tout signal en une somme de composantes oscillantes extraites directement de celui-ci de manière adaptative [HSLa98]. Ces composantes - ou *IMF pour Intrinsic Mode Functions* - s'interprètent comme des formes d'ondes non stationnaires - *modulées en amplitude et en fréquence* - pouvant être éventuellement associées à des oscillations non linéaires. L'*EMD* partage avec la transformée en ondelettes l'idée d'effectuer une analyse récursive dans laquelle un signal  $x(t)$  est décomposé en une partie oscillant rapidement, apparentée à un détail, et une partie oscillant plus lentement jouant

le rôle d'une approximation, celle-ci étant ensuite décomposable à son tour selon le même principe.

Au cours de cette décennie, différentes versions de l'*EMD* ont vu le jour avec des applications très intéressantes en traitement des signaux et images. Dans ce paysage temps-fréquence mathématiquement bien formalisé, la décomposition modale empirique est apparue comme une curiosité pouvant renouveler un certain nombre de points de vue sur l'analyse harmonique. Le premier réflexe a donc été de l'appliquer, parfois sans discernement ni précautions, à toutes sortes de situations où les ondelettes avaient pu se révéler décevantes. À côté de cet engouement, des études plus circonspectes ont démonté le mécanisme de l'*EMD*, ce qui a permis de mieux comprendre son fonctionnement, de cerner plus rigoureusement ce qu'est un mode intrinsèque, d'en évaluer les performances et aussi d'en éprouver certaines limites. Mais, en dépit de ces efforts, l'*EMD* continue de ne reposer que sur un principe et de n'exister qu'à travers un algorithme, demeurant rétive à tout formalisme mathématique satisfaisant.

De plus, elles comportent certains défauts, liés notamment à l'interpolation. Le manque de garanti pour la convergence de l'algorithme est resté un problème ouvert. Une approche *EDP* pour le sifting process proposée dans [NDL10, NTG<sup>+</sup>12a] et la contribution mathématique dans la thèse de *O. Niang* [Nia07] ont été d'une grande révolution face à un tel contexte. Nous avons récemment proposé dans [NTD<sup>+</sup>13] une alternative pour l'interpolation des points caractéristiques, basée sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles. Ce nouvel interpolateur permet d'avoir des résultats assez satisfaisant dans de nombreuses applications qui reposent sur la décomposition modale empirique.

À partir de ce dispositif mathématique, nous avons pu construire une suite d'opérateurs, qui à partir d'un certain rang - *donc à la convergence* -, nous permet d'obtenir directement un mode sans passer par les itérations habituelles du *sifting process*. Ceci pourrait nous permettre d'avancer vers une description analytique de la méthode *EMD* qui est restée jusqu'ici un défi majeur.

Pour aller plus loin encore, nous avons proposé dans [NTDL12] une nouvelle méthode de décomposition du signal appelée Décomposition Spectrale intrinsèque - *SID pour Spectral Intrinsic Decomposition* -. Cette nouvelle méthode peut être considérée comme une généralisation de la décomposition modale empirique du fait qu'elle fournit des composantes élémentaires appelées *SPMF* - *pour Spectral Proper Mode Function* - et renferment chacune, des informations fréquentielles présentes dans le signal à décomposer. Ces *SPMFs* s'apprêtent bien à des applications comme la restitution du signal, le débruitage et la compression.

Une extension 2  $D$  de la Décomposition Spectrale Intrinsèque - *SID 2D* - est envisagée avec plusieurs perspectives d'applications en imagerie médicale avec la segmentation pour la mise en évidence de certaines pathologies, en télédétection avec la reconnaissance de formes et l'extraction de caractéristique, en tatouage d'image avec la sélection des bandes de fréquences sur lesquelles on peut insérer une marque tout en garantissant une certaine robustesse, ainsi que pour des techniques d'identification par la biométrie servant principalement à des applications dans le domaine de la sécurité, comme le contrôle d'accès automatique.

# Annexes





## Publications



## Publications Personnelles

[NGT+11] Oumar Niang, Mouhamed Ould Guerra, Abdoulaye Thioune, Eric Deléchelle, Jacques Lemoine, and Mary Teuw Niane. **A propos de l'orthogonalité dans la décomposition modale empirique.** *GRETSI*, 2011.

[NTD+13] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Eric Deléchelle, Mary Teuw Niane, Jacques Lemoine, et al. **About a partial differential equation-based interpolator for signal envelope computing : Existence results and applications.** *ISRN Signal Processing*, 2013.

[NTDL12] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. **Spectral Intrinsic Decomposition method for adaptive signal representation.** *ISRN Signal Processing*, 9(3), 2012.

[NTG+12a] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mohamed Cheikh El Gueirea, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. **A new signal denoising method using iterative thresholding of the Spectral Intrinsic Decomposition.** *International Journal of Computer Science Issues*, 9(3), November 2012.

[NTG+12b] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mohamed Cheikh El Gueirea, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. **Partial differential equation-based approach for empirical mode decomposition : application on image analysis.** *IEEE Transaction on Image Processing*, 21(9) :39914001, 2012.

## Sélection de Publication

[NGT+11] Oumar Niang, Mouhamed Ould Guerra, Abdoulaye Thioune, Eric Delé-  
chelle, Jacques Lemoine, and Mary Teuw Niane. **A propos de l'orthogonalité dans la  
décomposition modale empirique.** *GRETSI*, 2011.

# A propos de l'Orthogonalité dans la Décomposition Modale Empirique

Oumar NIAN<sup>1,2</sup>, Mouhamed OULD GUERRA<sup>2</sup>, Abdoulaye THIOUNE<sup>1,3</sup>, Éric DELÉCHELLE<sup>1</sup>, Jacques LEMOINE<sup>1</sup>  
et Mary Teuw NIANE<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI- E.A.3956)  
Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, France

<sup>2</sup> Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI),  
Universite Gaston Berger (UGB) Sénégal

<sup>3</sup> Faculté des Sciences et Techniques,  
Universit Cheikh Anta Diop de Dakar (UCAD)

niangom@yahoo.fr, oniang@ucad.sn, lemoine@u-pec.fr, delechelle@u-pec.fr

**Résumé** — La décomposition modale empirique (EMD) est une méthode de décomposition de signaux non stationnaires ou issus de systèmes non linéaires, en composantes modulées en Amplitude et en fréquence. Elle s'apparente à la décomposition en ondelettes avec l'avantage supplémentaire que constitue son autoadaptabilité. Malgré ses nombreuses applications en traitement de signaux et images, l'EMD demeure encore limitée par une absence de formalisme mathématique. Dans de récents travaux, nous avons proposé un modèle basé sur des Equations aux Dérivées Partielles (EDP) et une approche spectrale comme cadre d'étude et d'implémentation de l'algorithme. Dans cette communication, nous mettons à profit ce cadre théorique pour analyser de la propriété d'orthogonalité dans la décomposition EMD en faisant une analogie avec l'algorithme de poursuite et en ouvrant des perspectives sur la formalisation de l'EMD.

**Abstract** — The Empirical Mode Decomposition is an multiscale autoadaptative method for decomposition of non linear signal into AM-FM components. Its similar to an wavelets decomposition. Despite its many applications in signal and images processing, the EMD is still limited by a lack of mathematical formalism. In recent work, we proposed a model based on Partial Differential Equations (PDE) and a spectral approach for the study and the implementation of the algorithm. In this paper, we use this theoretical framework to analyze the orthogonality property in EMD decomposition. We make an analogy with the matching pursuit algorithm and give some perspectives on the formalization of the EMD.

## Introduction

L'orthogonalité de la décomposition EMD est actuellement à l'état de conjecture. Dans [1, 2], un cadre fonctionnel de calcul des enveloppes moyennes par un modèle d'EDP et une approche spectrale est introduit par *O.Niang et al.* dans l'implémentation de l'EMD. A partir de l'approche spectrale d'une part, une analogie avec une suite de projections orthogonales en cascade est faite, et d'autre part, nous construisons un dictionnaire issu de l'EMD à partir des enveloppes moyennes passant par les points caractéristiques. Dans un premier temps, nous rappelons l'algorithme classique EMD, le modèle de l'interpolateur EDP et l'approche spectrale pour le calcul des tendances du *sifting process*. Dans un deuxième temps, une analyse de l'orthogonalité est effectuée ainsi qu'une analogie avec une cascade de projections orthogonales et la comparaison avec l'algorithme de *matching pursuit*. Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

## 1 Rappels sur la Décomposition Modale Empirique

La Décomposition EMD comme présentée par Huang dans [3] est une méthode de décomposition de signaux complexes (non stationnaires et issus de systèmes non linéaires) en composantes AM-FM, modulées en amplitude et en fréquence appelées fonctions modes intrinsèques pour *Intrinsic Mode Functions* (IMFs) en anglais. Le principe de l'EMD consiste à considérer localement un signal comme la superposition d'une oscillation rapide et d'une tendance de fréquence plus basse. Pour ce faire, l'algorithme classique procède au calcul de l'enveloppe moyenne du signal à partir de l'interpolation des extrema locaux. Cette enveloppe est soustraite du signal puis la même procédure est appliquée à cette différence jusqu'à ce que l'enveloppe obtenue soit nulle ou quasi nulle. Le résultat obtenu à l'issue de cette procédure donne le premier IMF. Les modes suivants d'ordre supérieur sont calculés par

le même processus dit de *tamissage* ( *sifting process* en anglais) sur le résidu (différence du signal courant et de l'IMF). L'algorithme de la décomposition peut s'arrêter à un ordre défini, ou lorsqu'il n'existe plus d'oscillations à extraire dans le résidu. Ainsi, pour tout signal  $s[n]$ , l'EMD donne une décomposition suivante :

$$s[n] = \sum_{k=1}^K imf_k[n] + r_K[n], \quad (1)$$

où  $imf_k$  est le  $k^{ieme}$  IMF du signal, et  $r_K$  est le résidu final (un polynôme de faible degré). Il est connu que le *sifting process* procure un nombre limité d'IMFs qui sont par moment quasi orthogonaux. Un IMF peut être vu comme une ondelette à bande étroite  $\varphi$  modulée par un signal  $a[n]$  de basse fréquence.

$$imf_k[n] = a_k[n] \varphi_k[n].$$

[5, 4], une interprétation en termes de bancs de filtres peut être effectuée dans le cas de l'analyse de bruits stochastiques.

L'EMD s'apparente alors à bien des égards à la technique de décomposition par ondelettes. Par contre la propriété d'orthogonalité est bien maîtrisée dans la théorie des ondelettes, ce qui n'est pas le cas pour l'EMD. Contrairement à la décomposition en ondelettes, l'EMD fonctionne bien avec une classe de fonctions n'appartenant pas à  $C^2(\Omega)$ , il est prouvé dans [1] que l'espace des fonctions éligibles pour l'EMD est l'espace de Sobolev  $H^1(\Omega)$ . Dans la section suivante, nous exposons le modèle d'EDP et l'approche spectrale sur lesquels nous nous appuyons pour analyser l'orthogonalité dans la décomposition EMD.

## 2 Le Modèle d'EDP et l'approche spectrale pour l'EMD

Considérons le signal  $s_0$  à décomposer comme condition initiale d'un processus de diffusion laissant invariants les points caractéristiques du signal. Reprenons pour cela le modèle basé sur des EDPs ci-après proposé et largement étudié dans [6, 1, 2] :

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( g(x) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right) = 0, \quad (2)$$

où  $g(x)$  est une fonction de diffusivité. La variable temporelle est artificielle et désigne le degré de filtrage du signal d'entrée. Cette fonction est nulle aux points caractéristiques et permet à la solution de l'EDP d'interpoler ces points. Les points caractéristiques peuvent être constitués des extrema locaux, des points de maximum ou minimum de courbure ou des points d'inflexion du signal. Ainsi selon le type de points caractéristiques, la solution asymptotique de l'EDP donne l'enveloppe supérieure ou l'enveloppe inférieure ou l'enveloppe moyenne. La fonction

de diffusivité peut prendre plusieurs formes (voir [6, 1, 2]) dont la suivante

$$g^\pm(x) = \frac{1}{9} \left[ |\text{sgn}(\delta_x^1 s_0(x))| \pm \text{sgn}(\delta_x^2 s_0(x)) + 1 \right]^2. \quad (3)$$

qui correspond au calcul des enveloppes supérieures ( $g^+$ ) et inférieures ( $g^-$ ).

L'équation (2) peut être vue comme une équation du type *Long-Range Diffusion (LRD)* (voir [7, p.244]), avec une fonction de sélectivité  $g(x)$ . Désignons respectivement par  $s_0(x) = s(x, t=0)$  et  $s_\infty(x) = s(x, t=\infty)$  les conditions initiales et les solutions asymptotiques de l'équation (2) avec conditions aux bords de Neuman (voir [1] pour les résultats d'existence). Pour tout  $t > 0$ , la solution  $s(., t)$  est dans l'espace

$$\mathcal{V} = \left\{ v \in H^3(\Omega) \mid \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \exists \Gamma_\Omega \subset \Omega : \int_{\Gamma_\Omega} v dx = 0 \right\}$$

où  $\Omega$  est le domaine de définition du signal.

## Technique spectrale de calcul des enveloppes

La résolution de l'EDP précédente (voir [1, 2]) par un schéma numérique dans le domaine  $\Omega \times [0, T]$  maillé avec le réseau de points  $(t_k, x_i) = (k\Delta t, i\Delta x)$  pour  $k \geq 0, i \in \mathbb{Z}$ , avec  $\Delta x = 1$ ,  $N$  désignant la longueur de  $\Omega$ , on note par  $U_i^k$  la valeur approchée de la solution  $u(t, x)$  au point  $(k\Delta t, i\Delta x) = (k\Delta t, i)$ , donne le schéma discret :

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta t} + Au_{j+1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4)$$

Avec  $A$  l'opérateur issu de la discrétisation. Par récurrence

$$u_n = (I + \Delta t A)^{-n} u_0 = (I + \Delta t A)^{-1} u_{n-1} \quad (5)$$

Quand  $n$  tend vers l'infini,  $u_n$  tend vers  $u$ , l'enveloppe moyenne. En passant à la limite dans les deux membres, on a :

$$u = u_\infty = (I + \Delta t A)^{-1} u_\infty. \quad (6)$$

C'est à dire que  $u$  est un point fixe de l'opérateur  $\mathcal{A} = (I + \Delta t A)^{-1}$  ou encore que  $u$  est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 du même opérateur  $\mathcal{A}$ . Finalement pour calculer  $u$ , il suffit de chercher les vecteurs propres de  $\mathcal{A}$  associés à la valeur propre 1. La solution  $u$  est alors la combinaison linéaire de ces vecteurs propres pondérés par l'amplitude des points caractéristiques. Dans la figure 1, sont représentés les vecteurs propres de l'opérateur  $\mathcal{A}$  associés à la valeur propre 1, pour le signal  $s$ . Pour plus de clarté, un vecteur propre sur cinq est représenté. Le nombre de ces vecteurs propres est de l'ordre du nombre de points caractéristiques du signal d'entrée. [1, 2].

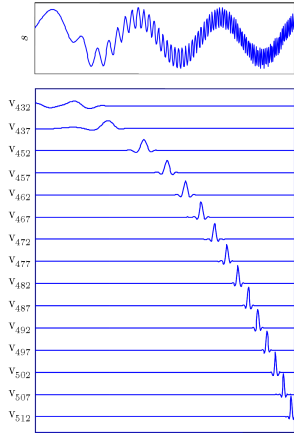


FIGURE 1 – Représentation de vecteurs propres associés à la valeur propre 1, avec une décimation de 5. Les indices représentant les positions des valeurs propres dans la matrice diagonale du spectre de  $\mathcal{A}$ .

### 3 Analyse de l'orthogonalité par approche spectrale et projections orthogonales

#### Par approche spectrale

D'après ce qui précède, si la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 est  $p_1$  et si on note  $M_1$  la somme pondérée des ces  $p_1$  vecteurs propres, il s'en suit la décomposition suivante :  $u_0 = M_1 + \text{Im}f_1$ , avec  $M_1 \in \mathcal{V}$  et  $\text{Im}f_1 = u_0 - M_1$  qui est un *protomode* si la condition d'extraction d'IMF est vérifiée. Sur la figure précédente on note que les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 sont quasi orthogonaux. Dés lors pour espérer avoir une décomposition orthogonale, on peut procéder par une orthonormalisation des vecteurs propres ou en choisir un échantillon issus de valeurs propres suffisamment éloignées les unes des autres. L'opérateur  $\mathcal{A}$  n'est pas parfaitement symétrique. La distorsion de la symétrie est observée autour des points caractéristiques, ce qui explique principalement la non orthogonalité parfaite de la décomposition. La recherche d'un opérateur symétrique est alors une piste pour obtenir une base orthogonale de décomposition.

#### Par suite de projections orthogonales

Considérons l'ensemble des réseaux de points de contrôles constitué par les points caractéristiques représentés ici par les points d'inflexion du signal d'entrée  $s_0 \in H^2(\Omega)$ , qu'on suppose en nombre fini  $N_1$  et représentés par la famille de points  $(x_i^0, s_0(x_i^0))_{i \in [0, \dots, N_1]}$ . Soit alors  $V_{N_1}^0$  l'espace des fonctions de  $H^3(\Omega)$  engendrées par les splines cubiques sur  $\Omega = ]a, b[$  définies par les points de contrôles

$(x_i^0, s_0(x_i^0))_{i \in [0, \dots, N_1]}$ .  $V_{N_1}^0$  est un sous espace fermé de  $H^3(\Omega)$ , de même que  $\mathcal{V} \cap V_{N_1}^0$ . Et soit  $P_{V_{N_1}^0}$  la projection orthogonale de  $H^2(\Omega)$  ( du fait que  $u_0 \in H^2(\Omega)$ ) sur  $\mathcal{V} \cap V_{N_1}^0$ . La projection de  $u_0$  vérifie l'équation suivante :

$$s_0 = P_{V_{N_1}^0}(s_0) + (s_0 - P_{V_{N_1}^0}(s_0)). \quad (7)$$

En posant  $D_1(s_0) = s_0 - P_{V_{N_1}^0}(s_0)$  et  $R_1(s_0) = P_{V_{N_1}^0}(s_0)$ , il s'en suit la décomposition orthogonale suivante :

$$s_0 = R_1(s_0) + D_1(s_0) \quad (8)$$

où  $(R_1(s_0) \perp D_1(s_0))$ .

Nous pouvons interpréter  $R_1(s_0)$  comme le résidu ou le *résumé* (approximation) de  $s_0$  et  $D_1(s_0)$  comme les détails à la première échelle de décomposition. Ainsi si  $R_1(s_0) \neq 0$ , on pose  $s_1 = D_1(s_0)$  et on suit le principe du *sifting process* en considérant la projection orthogonale  $P_{V_{N_2}^1}$  sur le sous espace  $\mathcal{V} \cap V_{N_2}^1$  de  $H^3(\Omega)$  engendré par les splines cubiques définies par  $(x_j^1, s_1(x_j^1))_{j \in [0, \dots, N_2]}$ , suite des points d'inflexion de  $s_1$ . On espère maintenant que  $P_{V_{N_2}^1}(s_1) = 0$  ou qu'il vérifie les condition d'extraction d'IMF.

Si c'est le cas, la décomposition orthogonale suivante étant de rigueur

$$s_1 = R_2(s_1) + D_2(s_1), \quad (9)$$

avec  $R_2(s_1) = P_{V_{N_2}^1}(s_1)$  et  $D_2(s_1) = s_1 - P_{V_{N_2}^1}(s_1)$ , nous obtenons la représentation du signal original  $s_0$

$$s_0 = R_1(s_0) + R_2(s_1) + D_2(s_0). \quad (10)$$

En posant  $R_{\text{residu}} = R_2(s_1) + R_1(s_0)$ , on a une première décomposition quasi orthogonale de  $s_0$ ,

$$s_0 = D_2(s_1) + R_{\text{residu}}. \quad (11)$$

Cette décomposition est orthogonale avec  $D_2(s_1) = \text{IMF}_1$  le premier mode. Pour obtenir le deuxième mode, il suffit de reprendre le processus avec  $R_{\text{residu}}$ . Cette procédure est répétée jusqu'au rang  $k$  pour donner la décomposition

$$s_0 = \sum_{i=1}^k \text{IMF}_i + R_k. \quad (12)$$

Les  $\text{IMF}_i$  sont deux à deux orthogonaux et  $(\sum_{i=1}^k \text{IMF}_i) \perp R_k$  ainsi, la parfaite orthogonalité est perturbée par  $R_k$ .

### 4 Construction d'un pseudo-dictionnaire pour l'EMD

Nous reprenons l'analogie faite entre l'EMD et l'algorithme de poursuite (ou en anglais *matching pursuit* [8]) avec cette fois-ci l'enveloppe moyenne passant par les points d'inflexion du signal. A chaque étape numéro  $p$  du *sifting process*, on récupère l'enveloppe moyenne  $\psi_p$ . Et on construit un *pseudo-dictionnaire*  $\mathcal{D}$  défini par :

$$\mathcal{D} = \{(\psi_p)_{p=1, \dots, m}\} \quad (13)$$



où  $m \in \mathbb{N}$  est le nombre d'enveloppes moyennes tout au long du *sifting process*. Par construction, le dictionnaire  $\mathcal{D}$  profite de l'auto-adaptabilité de l'EMD. La forme des vecteurs propres associés à la valeur propre 1 représentés dans la figure 1 donne une idée sur le comportement des éléments du dictionnaire. L'aspect orthogonale des éléments du dictionnaire est assez visible. Soit  $\mathcal{H}$  le sous-espace vectoriel fermé de  $L^2(\Omega)$  engendré par les éléments de  $\mathcal{D}$ . Pour un signal à décomposer  $x \in L^2(\Omega)$ , on désigne par  $\mathcal{V}_1$  l'espace vectoriel engendré par l'enveloppe moyenne  $m_1$  du signal  $x$ . Si  $p_1^x$  désigne la projection orthogonale de  $x$  sur  $\mathcal{V}_1 \subset \mathcal{D}$ , alors il résulte des propriétés de projection orthogonale que  $p_1^x = m_1$  est orthogonale à  $x - p_1^x$ . Ainsi, on a la décomposition orthogonale suivante  $x = x - p_1^x + p_1^x$ . A partir de cette équation, nous voyons que l'orthogonalité de la décomposition au sens de l'EMD est obtenue. En notant  $p_k^{m_{k-1}}$  la projection orthogonale de l'enveloppe  $m_{k-1}$  sur la droite vectorielle engendrée par  $m_k$ , et en réitérant la même procédure de projection on a :  $x = imf_1 + m_1$ ,  $m_1 = m_1 - m_2 + m_2$ ,  $imf_2 = m_1 - m_2$ . D'où  $x = imf_1 + imf_2 + m_2$ . Ce dont on est certain c'est que  $imf_2 + m_2$  est orthogonal à  $imf_1$ , mais l'on est pas sûre que  $imf_2$  soit orthogonal à  $imf_1$ . Si le résidu  $m_2$  est très proche de zéro on a une quasi orthogonalité. En définitive avec une profondeur de décomposition  $K$ , on a

$$x = \sum_{k=1}^K IMF_k + R_K. \quad (14)$$

Cette décomposition peut être interprétée comme étant à *orthogonalité emboîtée*, en ce sens que chaque composante courante  $IMF_p$  est orthogonale à la somme des composantes suivantes de la décomposition  $\sum_{k=p+1}^K IMF_k + R_K$ . Soit le pseudo-dictionnaire  $\mathcal{D}$  construit avec l'ensemble des enveloppes moyennes, on reproduit une version de l'algorithme de poursuite comme suit : en récupérant dans  $R_1$ , le meilleur élément du dictionnaire des enveloppes et en réitérant la décomposition :  $Imf_1 = x - \langle x, R_1 \rangle R_1$ ,

$$\text{avec } R_1 = \arg \min_{h \in \mathcal{D}} |\langle x, h \rangle|^2.$$

Pour une profondeur de décomposition égale à  $N$ , cela donne la décomposition EMD du signal  $x$ , avec un aspect multi-échelle

$$x = \sum_{m=1}^N \langle R_{m-1}, imf_m \rangle imf_m + R_N. \quad (15)$$

A chaque étape  $m$ , de la décomposition,  $R_{m+1}$  et  $Imf_{m+1}$  sont orthogonaux. On a ainsi une décomposition presque orthogonale qui ressemble à bien des allures à celle de type Franklin [9] et à l'algorithme de poursuite.

## 5 Conclusion

Par l'interpolateur EDP et une approche spectrale, nous avons analysé l'orthogonalité de la décomposition EMD.

Les points caractéristiques peuvent être les points de maximum et minimum de courbure qui généralisent le cadre de l'étude effectuée. Par cette étude, on a montré pourquoi l'EMD pouvait être vue comme une décomposition quasi orthogonale en comparaison d'une part avec l'algorithme de poursuite, et d'autre part avec une cascade de projections orthogonales sur un sous-espace de  $\mathcal{V}$ . La ressemblance avec la décomposition de Franklin est aussi établie. Une étude plus fine du pseudo-dictionnaire pour l'EMD et une symétrisation de l'opérateur  $\mathcal{A}$  permettraient de rechercher les propriétés de systèmes de Riesz, de mieux appréhender l'*orthogonalité emboîtée* de l'EMD et d'ouvrir la voie d'une meilleure compréhension de l'EMD.

## Références

- [1] O. Niang, "Empirical Mode Decomposition : Contribution à la modélisation mathématique et application en traitement du signal et l'image," PhD thesis, Univ Paris 12, Créteil, France, Septembre 2007.
- [2] Oumar NIANG, Eric Déléchéelle and Jacques Lemoine. "A spectral approach for sifting process in empirical mode decomposition". Transaction on Signal Processing, Volume 58, Num 11. pp 5612-5623. October 2010.
- [3] N.E. Huang, Z. Shen, S.R. Long, M.L. Wu, H.H. Shih, Q. Zheng, N.C. Yen, C.C. Tung, and H.H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," Proc. Roy. Soc. London A, vol. 545, pp. 903-995, 1998.
- [4] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves, "Empirical mode decomposition as a filter bank," IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 112-114, 2004.
- [5] Z. Wu and N.E. Huang, "A study of the characteristics of white noise using the Empirical Mode Decomposition method," Proc. Roy. Soc. London A, vol. 460, no. 2046, pp. 1597-1611, 2004.
- [6] E. Deléchéelle, J. Lemoine, and O. Niang, "Empirical Mode Decomposition : An Analytical Approach for Sifting Process," IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no 11, pp. 764-767, 2005.
- [7] J.D. Murray, *Mathematical Biology*, 2nd ed., New York : Springer-Verlag, Biomathematics Texts, vol. 19, 1993.
- [8] S. Mallat and Z. Zhang. "Matching pursuit with time-frequency dictionaries". IEEE Trans. Signal Process., 41(12) :p.33973415, 1993.
- [9] Alain Yger. Théorie et analyse du signal : cours et initiation matlab et Scilab. Université Maths Appli, 1999.

## Sélection de Publication

[NTG+12b] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mohamed Cheikh El Gueirea, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. **Partial differential equation-based approach for empirical mode decomposition : application on image analysis.** *IEEE Transaction on Image Processing*, 21(9) :39914001, 2012.

# Partial Differential Equation-Based Approach for Empirical Mode Decomposition: Application on Image Analysis

Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mouhamed Cheikh El Gueirea, Eric Deléchéle and Jacques Lemoine

**Abstract**—The major problem with Empirical Mode Decomposition (EMD) algorithm is its lack of a theoretical framework. So, it is difficult to characterize and evaluate this approach. In this paper, we propose in the two dimensional case, the use of an alternative implementation to the algorithmic definition of the so-called 'sifting process' used in the original Huang's Empirical Mode Decomposition method. This approach, especially based on Partial Differential Equations (PDE) was presented by O. Niang and al. in previous works, in 2005 and 2007 and lays on a nonlinear diffusion-based filtering process to solve the mean-envelope estimation problem. In 1D case, the efficiency of the PDE-based method, compared to the original EMD algorithmic version, is also illustrated in recent paper [1]. Recently, several bi-dimensional extensions for EMD method were proposed. Despite some efforts, 2D versions for EMD appear poorly performing and are very time consuming. So in this work, an extension to 2D space of the PDE-based approach is extensively described. This approach has been applied in case of both signal and image decomposition. Obtained results confirm the usefulness of the new PDE-based sifting process for decomposition of various kinds of data. Some results have been provided in the case of image decomposition. The effectiveness of the approach encourages its usage in a number of signal and image applications such as denoising, detrending, or texture analysis.

**Index Terms**—Empirical Mode Decomposition (EMD), Mean-Envelope, Partial Differential Equation, Restoration, Signal, Image, Inpainting.

## I. INTRODUCTION

IN complement of a previously published letter [1]–[3], this paper addresses an alternative to the problem of mean-envelope estimation of a signal that is a crucial step in the Empirical Mode Decomposition (EMD) method originally proposed by N.E. Huang et al. [4]. Although EMD is often remarkably effective in some applications [5]–[8], this method

is faced with the difficulty of being essentially based on an algorithm, and therefore not admitting an analytical formulation which would permit a theoretical analysis and performance evaluation.

The purpose of this paper is therefore to contribute analytically to a better understanding of the EMD method with an 2D extension of the approach presented in [3]. There are various applications of nonlinear diffusion filtering in signal and image processing. Such filters are used for denoising, enhancement, gap completion, and are expected to play an increasing role in future applications. Nonlinear diffusion filtering is a continuous filter, formulated as a partial differential equation (PDE). The filter operation is practically performed by solving the nonlinear PDE numerically. In [2] a fully mathematical study of PDE model proposed in this paper was done. The paper is organized as follows: we recall the classical EMD and present the PDE model in sections II and III. Section IV recalls some models of diffusion equation used in image processing. Then the 2D extension of the PDE model for EMD is presented in Section V. We finish with numerical simulations and a conclusion.

## II. EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION BASICS

We summarized in this section the EMD method. The literature on the EMD and its use in applied science is abundant, a permanent updating of some recent and not exhaustive developments may be obtained by consulting the following references. Details on the implementation of EMD algorithm and Matlab codes for some applications are fully available in [9]–[11].

### A. EMD principle

EMD [4] method decomposes iteratively a complex signal (i.e. with several characteristic time scales coexisting) into elementary AM-FM type components called Intrinsic Mode Functions (IMF). The underlying principle of this decomposition is to locally identify in the signal, the most rapid oscillations defined as the waveform interpolating interwoven local maxima and minima. To do so, local maxima points (resp. local minima points) are interpolated with a cubic spline, to yield the upper (resp. lower) envelope. The mean envelope (half sum of upper and lower envelopes) is then subtracted from the initial signal, and the same interpolation scheme is re-iterated on the remainder. The so called sifting process stops when the mean envelope is

Copyright ©2012 IEEE.

Oumar Niang is with the Département Génie Informatique et Télécommunications, Ecole Polytechnique de Thiès BP A 10 Thiès, BP 64551 Dakar-Fann, Sénégal, and also with the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSIE.A.3956) Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, Créteil 94010, France and with the Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI), Université Gaston Berger (UGB), Saint-Louis, Sénégal (e-mail: oniang@ucad.sn; niangom@yahoo.fr)

M. C. El Gueirea and A.Thioune are PhD Student respectively at UFR-SAT of Gaston Berger University and at Faculté des Sciences et Technique of the Cheikh Anta Diop University in Sénégal. BP 64551 Dakar Fann, Senegal. (e-mail: thiounelaye@yahoo.fr).

É. Deléchéle and J. Lemoine are with the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSi-E.A.3956)-Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, Créteil 94010, France (e-mail: lemoine@u-pec.fr,delechele@u-pec.fr).

reasonably zero everywhere, and the resulting signal is called the first IMF. The higher order IMFs are iteratively extracted applying the same procedure to the initial signal after the previous IMFs have been removed.

To be an IMF, a signal must satisfy two criteria, the first one being that the number of local maxima and the number of local minima differ by at most one, and the second, the mean of its upper and lower envelopes equals zero. So, for any 1D discrete signal, EMD ends up with the following representation

$$s[n] = r_K[n] + \sum_{k=1}^K imf_k[n],$$

where  $imf_k$  is the  $k$ -th mode (or IMF) of the signal, and  $r_K$  stands for residual trend (a low order polynomial component).

Sifting procedure generate a finite (and limited) number of IMFs that seems nearly orthogonal to each other [4]. By nature of the decomposition procedure, the technique decomposes data into  $K$  fundamental components, each with distinct time scale: the first component has the smallest time scale. As the decomposition proceeds, the time scale increases, and hence, the mean frequency of the mode decreases.

### B. EMD related works

Numerous efforts on EMD method were essentially done for algorithm improvement [12], experimental characterization on fractional Gaussian noise decomposition showing spontaneous emergence of a filter bank structure, almost dyadic and self-similar and resulting on a possible Hurst's exponent estimation [13]–[16]. To decompose noised data or signal with intermittencies, two EMD improvements have been proposed in [17] by Ensemble EMD (EEMD) method with an multi-dimensionnal version in [18], and in [1] with an Tykhonov regularization. After the introduction of complex signal EMD and the rotation invariant EMD proposed respectively in [19] and in [20], the Bivariate EMD in [21], the decomposition of multivariate signals using the Active Angle Averaging is presented in [22]. Several works have proposed different approaches for 2D extension of EMD, including a row-wise/column-wise decomposition, in the spirit of the so-called non-standard wavelet transform, or a truly bidimensional version of EMD [23]–[28]. A fully multivariate EMD method is presented in [29]. In [30], a multi-dimensional ensemble empirical mode decomposition (MEEMD) for multi-dimensional data (such as images or solid with variable density) is proposed. A first conclusion from these works is that, EMD method appears as a simple, local and fully data-driven approach, adapted to nonlinear oscillations. More, the combination of the EMD method and the associated Hilbert spectral analysis can offer a powerful method for nonlinear and non-stationary data analysis [4], [9], [10].

During sifting process, cubic splines interpolation is a crucial step to create the upper and lower envelopes of the data set. Fitting of the splines at the extrema can produce

several inconveniences: (i) problems can occur near the ends; (ii) end swings can eventually propagate inward; (iii) overshoots and undershoots could occur, (iv) influence of the sampling [32]. Some solutions were proposed in [33], [34]. In 2D versions, the main drawbacks of EMD are the definition of extrema of an image (or a surface), and the choice of the interpolation method acting on a set of scattering points. More, such decomposition in 2D is extremely time-consuming.

Some contributions for theoretical understanding of the EMD should be noted. Daubaucies and al. [35] proposed an combination of wavelet analysis and reallocation method and introduce a precise mathematical denition for a class of functions that can be viewed as a superposition of a reasonably small number of approximately harmonic components. Globally EMD method suffers from the drawback of a lack of mathematical framework beyond numerical simulations. Despite some works [1]–[3], [36], [37], a complet EMD formalism remains a challenge. In the following section, we recall the analytical contribution of O. Niang and al. in [1]–[3] based on PDE approach to compute the mean envelope.

### III. PDE-BASED FORMULATION IN 1-D

The mathematical modeling leads to a PDE parabolic system which gives a family of solutions that interpolate the characteristic points of a signal. This family of functions converge to the envelope of the signal which was calculated by cubic spline interpolation in classical EMD. It is proven that this solution is in  $H^2(\Omega)$  whereas the input signal representing the initial solution of the PDE is in  $H^1(\Omega)$ , with  $\Omega$  is an closed and bounded set signal which is the domain of the signal. A possible form for fourth order diffusion equation introduced in [3] and in [2] is:

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( g(x, t) \frac{\partial^3 s(x, t)}{\partial x^3} \right), \quad (1)$$

where  $g(x, t)$  is the diffusivity function possibly depending on both position and time, and where the time variable is artificial, and measures the degree of processing (e.g. smoothing) of the signal. Equation (1) can be viewed as a Long-Range Diffusion (LRD) equation (see for example reference [38, p.244]), with thresholding function  $g(x)$  depending only on position (constant in time) and more precisely on some characteristic fix points of the signal to decompose. After derivation equation (1) read:

$$s_t(x, t) = -\partial_x^1 g(x) \partial_x^3 s(x, t), \quad (2)$$

where the subscript  $t$  denotes partial differentiation with respect to the variable  $t$  and  $\partial_x^q$  denotes partial differentiation of order  $q$  with respect to the variable  $x$ . In the following we use the notation  $s_0(x) = s(x, t = 0)$  for initial condition and  $s_\infty(x) = s(x, t = \infty)$  for asymptotic solution of equation (1).

In order to implement sifting procedure in a PDE-based framework, the following processes are based on the definition of characteristic fix points of a function: (i) turning-points; (ii) curvature-points. Here, we are interested in turning points

that are minima, maxima and inflexion points, defining by the values of their first and/or second derivatives. With this model, to estimate lower and upper envelopes, a couple of PDE is given instead of a cubic spline interpolation in sifting process.

#### A. A coupled PDEs system

A simple method to estimate mean-envelope is to formulate a coupled PDEs system to mimic Huang's sifting process based on upper and lower envelopes estimation. Turning points are here respectively maxima and minima of the signal to be decomposed. This coupled PDEs system, based on equation (1) leads to (see also [2], [3] for a more less general PDE formulation):

$$\begin{cases} s_t^+(x, t) = -\delta_x^1 [g^+ (\delta_x^1 s_0(x), \delta_x^2 s_0(x)) \delta_x^3 s^+(x, t)] \\ s_t^-(x, t) = -\delta_x^1 [g^- (\delta_x^1 s_0(x), \delta_x^2 s_0(x)) \delta_x^3 s^-(x, t)] \end{cases} \quad (3)$$

After convergence of system (3) [2], asymptotic solutions  $s_\infty^+(x)$  and  $s_\infty^-(x)$  stand respectively for upper and lower envelopes of  $s_0$ . Hence, mean-envelope of  $s_0$  is obtained by:

$$s_\infty(x) = \frac{1}{2} [s_\infty^+(x) + s_\infty^-(x)].$$

In equation (3), stopping functions,  $g^\pm$ , depend on both first and second order signal derivatives, with  $0 \leq g^\pm \leq 1$ . For example, a good choice for stopping functions seems (according to our tests) to be

$$g^\pm(x) = \frac{1}{9} [|\text{sgn}(\delta_x^1 s_0(x))| \pm \text{sgn}(\delta_x^2 s_0(x)) + 1]^2. \quad (4)$$

In such a way,  $g^+ = 0$  and  $\delta_x^1 g^+ = 0$  at maxima of  $s_0$ , in the same way  $g^- = 0$  and  $\delta_x^1 g^- = 0$  at minima of  $s_0$ . So, LRD acts only between two consecutive maxima (resp. minima) points until fourth-order derivative of  $s(x, t)$  is canceled. Since, stopping functions are piecewise constant, after convergence the resulting signal  $s_\infty^+(x)$  (resp.  $s_\infty^-(x)$ ) is a piecewise cubic polynomial curve interpolating the successive maxima (resp. minima) of signal. In equation (4) sign function,  $\text{sgn}(z)$ , is replaced by a regularized version. A possible expression is given by  $\text{sgn}_\alpha(z) = 2/\pi \arctan(\pi z/\alpha)$ . Physically the PDE solution diffuse everywhere except on the extrema of the signal. Its smoothing effect works like in the selective diffusion equation case.

#### B. Interpolation with tension

A more general form for equation (2) is

$$s_t(x, t) = \delta_x^1 [g(x) (\alpha \delta_x^1 s(x, t) - (1 - \alpha) \delta_x^3 s(x, t))], \quad (5)$$

so, in this form,  $\alpha$  is the tension parameter, and ranges from 0 to 1. Zero tension,  $\alpha = 0$ , leads to the biharmonic equation form (2) and corresponds to the minimum curvature construction for upper and lower envelopes. The case  $\alpha = 1$  corresponds to infinite tension (piecewise linear envelopes).

#### C. Numerical resolution

Numerical resolution for coupled PDEs system based on equation (5) with Neumann boundaries conditions, is implemented with a Crank-Nicolson scheme (semi or fully implicit) or Du Fort and Frankel scheme. Noting that a particular attention is made for derivatives of  $s_0$  in the definition of  $g(x)$ :

$$g(x) = g(D_1 s_0(x), D_2 s_0(x)),$$

where  $g = g^\pm$ , and  $D_1 z = \text{minmod}(D^+ z, D^- z)$ ,  $D_2 z = D^+ D^- z$ , where  $D^+$  and  $D^-$  are forward and backward first difference operators on the  $x$ -dimension, and where  $\text{minmod}(a, b)$  stands for the minmod limiter  $\text{minmod}(a, b) = \frac{1}{2} [\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)] \cdot \min(|a|, |b|)$ .

In the next paragraph, before presenting a 2D version of PDE-based approach for EMD, we recall some models of diffusion equations in image processing.

#### IV. DIFFUSION EQUATIONS FOR IMAGE PROCESSING

This part consists on a brief and non exhaustive presentation of classical nonlinear diffusion filters for image processing.

##### A. Perona-Malik equation

Let us first provide a model for nonlinear diffusion in image filtering. We briefly describe the filter proposed by Catté, Lions, Morel and Coll [39]. This filter is a modified version of the well know Perona and Malik model [40]. The basic equation that governs nonlinear diffusion filtering is:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \text{div} \left( g \left( |\nabla u(\mathbf{x}, t)|^2 \right) \nabla u(\mathbf{x}, t) \right), \quad (6)$$

with  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ , and where  $u(\mathbf{x}, t)$  is a filtered version of the original image  $u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x})$  as the initial condition, and with reflecting boundary. In equation (6)  $g(\cdot)$  is the conductivity (or diffusivity) function, which dependent (in space and time) on the image gradient magnitude. Several forms of diffusivity were introduced in the original paper of Perona and Malik [40]. All forms of diffusivity are chosen to be a monotonically decreasing function of the signal gradient. This behavior implies that the diffusion process maintains homogenous regions since little smoothing flow is generated for low image gradients, and in the same way, edges are preserved by a small flow in regions where the image gradients are high. Possible expressions for conductivity functions are:

$$\begin{aligned} g_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{1 + \left( \frac{|\nabla u(\mathbf{x}, t)|}{\beta} \right)^2}, \\ g_2(\mathbf{x}, t) &= \exp \left( - \left( \frac{|\nabla u(\mathbf{x}, t)|}{\beta} \right)^2 \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Parameter  $\beta$  is a threshold parameter, which influences the anisotropic smoothing process. The nonlinear equation (6) acts as a forward parabolic equation smoothing regions while preserving edges. In the Backward diffusion filters, a different approach is taken. Its goal is to emphasize large gradients and can be viewed as a reversing diffusion process. The moving back in time can be obtained mathematically by changing the sign of the conductivity function.

Other methods based on high order PDE are provided for image restoration like in [41]–[43]. With these methods, different functionals can be used to measure the oscillations in an image and a general formulation of the noise removal problem is solved by optimisation with constraint on noise level. Most numerical schemes for diffusion process implementation produce instability, oscillations, or noise amplification, or converge to a trivial solution like the average value of the whole gray level image values. So, in order to implement an appropriate stopping mechanism and to overcome stability problems, various modifications of the original diffusion scheme were attempted. Efficient numerical schemes were introduced in [44] based on Additive Operator Splitting (AOS) schemes, or based on Alternating Direction Implicit (ADI) scheme. See [44]–[47] for a review and extensions of these methods. Unlike these methods of high order PDE that are specially developed for denoising, our model was constructed to interpolate the characteristic points of a signal. The PDE interpolator is not based on any a priori knowledge constraint on the noise level as opposed to Total Variation method in [43].

### B. Selective image smoothing problem

Contrary to linear diffusion filters - signal convoluted with Gaussian of varying widths - nonlinear diffusion filters are possible solution to solve the selective image-smoothing problem. The major problem of nonlinear diffusion-based process is that it is generally difficult to correctly separate the high frequency components from the low frequency ones. A possible way is to adopt a dyadic wavelet-based approximation scheme [48]. Under this framework, a signal is decomposed into high frequency components and low frequency ones by using wavelet approximated high-pass and low-pass filters. In case of denoising applications, the objective of this process is to use the diffusivity function as a guide to retain useful data and suppress noise.

In the past few years, a number of authors have proposed fourth order PDEs for image smoothing and denoising with the hope that these methods would perform better than their second order analogues [49]–[54]. Indeed there are good reasons to consider fourth order equations. First, fourth order linear diffusion damps oscillations at high frequencies (i.e. noise) much faster than second order diffusion. Second, there is the possibility of having schemes that include effects of curvature (i.e. the second derivatives of the image) in the dynamics, thus creating a richer set of functional behaviors. On the other hand, the theory of fourth order nonlinear PDEs is far less developed than the second order analogues. Also such equations often do not satisfy a maximum principle or comparison principle, and implementation of the equations could thus introduce artificial singularities or other undesirable behavior. In recent studies, Tumblin [55], Tumblin and Turk [52] and Wei [53] proposed equations of the form:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\text{div}(g(m(u)) \nabla \Delta u(\mathbf{x}, t)), \quad (8)$$

where  $g(\cdot) = g_1(\cdot)$  as in equation (7), and  $m$  is some measurement of  $u(\mathbf{x}, t)$ . In [52], equation (8) is called a 'Low

Curvature Image Simplifier' (LCIS), and a good choice for  $m$  is defined as  $m = \Delta u$  to enforce isotropic diffusion [55].

### C. Super diffusion model

In fact, equation (6) is a more general form of the diffusion equation derived from Fick's law for mass flux,  $\mathbf{j}_1$ ,

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\text{div}(\mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t)),$$

with  $\mathbf{j}_1(\mathbf{x}, t) = -G_1 \nabla u(\mathbf{x}, t)$ , where  $G_1$  being a constant. From a point of view of kinetic theory, this is an approximation of a quasi homogeneous system which is near equilibrium. A better approximation can be expressed as a super flux of order  $Q$

$$\mathbf{j}_Q(\mathbf{x}, t) = \sum_{q=1}^Q (-1)^q G_q(\mathbf{x}, t) \nabla \nabla^{2q-2} u(\mathbf{x}, t),$$

with  $Q = 1, 2, \dots$ , and where  $G_q$  ( $q > 1$ ,  $G_q \geq 0$ ) describe super diffusivity functions. A truncation at the second order super flux,  $\mathbf{j}_2$ , leads to the expression

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\text{div}(-G_1 \nabla u(\mathbf{x}, t) + G_2 \nabla \Delta u(\mathbf{x}, t)). \quad (9)$$

A more simple expression for  $u_t(\mathbf{x}, t)$  is:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\sum_{q=1}^Q (-1)^q G_q(\mathbf{x}, t) \nabla^{2q} u(\mathbf{x}, t).$$

For  $Q = 2$ , we have:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = G_1(\mathbf{x}, t) \Delta u(\mathbf{x}, t) - G_2(\mathbf{x}, t) \Delta^2 u(\mathbf{x}, t). \quad (10)$$

These PDE tools for digital image processing make more reachable the 2D extension of the 1D PDE-based method for EMD.

## V. PDE-BASED BIDIMENSIONAL EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION

In this part, we develop an extension in 2D space of the proposed 1D PDE-based sifting process in order to perform Bidimensional Empirical Mode Decomposition (BEMD).

### A. Proposed super diffusion model in 2D-space

We consider here equation (5), with diffusion matrix functions,  $\mathbf{G}_q$ , as

$$\mathbf{G}_q(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_{q,1}(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & g_{q,2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

where  $g_{q,i}$  is the stopping function for  $q$ th-order term in the direction  $i$ .

The proposed super diffusion equation then leads to, for  $Q = 2$  and with tension parameter:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \text{div}(\alpha \mathbf{G}_1 \nabla u(\mathbf{x}, t) - (1 - \alpha) \mathbf{G}_2 \nabla \Delta u(\mathbf{x}, t)). \quad (11)$$

In order to estimate upper and lower envelopes, functions  $g_{q,i}$  in  $\mathbf{G}_q$  must to be specified. Obviously, there are many ways to construct anisotropic diffusion functionals in 2D. For simplicity, we test the following choice, with  $\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2$ , which is based on definition (4), for all  $q = 1, 2$ :

$$g_{q,i}^\pm(\mathbf{x}) = \frac{1}{9} [| \text{sgn}(\delta_{x_i}^1 u_0) | \pm \text{sgn}(\delta_{x_i}^2 u_0) + 1]^2. \quad (12)$$

In equation (12) signs  $\pm$  stand respectively for stopping functions for upper and lower envelopes estimation.

### B. Relation with PDEs defined on implicit surfaces

We can make the relationship of this simple LRD equation with a  $2q$ th-order heat equation on a curve or surface  $S$  in  $\mathbb{R}^N$  ( $N = 2$  for a curve and  $N = 3$  for a surface), which is given by

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -(-1)^q \nabla_S^{2q} u(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

with initial condition  $u(\mathbf{y}, 0) = f$  for  $\mathbf{y}$  on  $S$ . Here,  $\nabla_S^{2q} u$  is the  $2q$ -order differential operator applied on  $u$  intrinsic to the surface  $S$ . If  $S$  is defined as an implicit surface from a level set function  $\phi$ , i.e.  $S$  is defined as the zero level set of  $\phi$ ,  $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \phi(\mathbf{x}) = 0\}$ . So, it is easy to show that for all point on  $S$ , Laplacian operator  $\Delta_S u$  intrinsic to  $S$  can be compute using extrinsic derivatives as

$$\Delta_S u(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \nabla \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) |\nabla \phi(\mathbf{x})|), \quad (14)$$

where  $\mathbf{P}$  is a projection operator. If  $\phi$  is a signed distance function, then  $|\nabla \phi(\mathbf{x})| = 1$ , then equation (14) reduce to

$$\Delta_S u(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})).$$

In the same manner, we can define biharmonic operator,  $\Delta_S^2$  on  $u$  intrinsic to  $S$  as

$$\Delta_S^2 u(\mathbf{x}) = \nabla \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \nabla (\nabla \cdot (\mathbf{P}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}))).$$

As an example, letting  $S$  be the line making angle  $\theta$  with the  $x_1$ -axis in the image plane  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ . The projection matrix is then define by

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Noting that  $\mathbf{P}$  not depends on  $\mathbf{x}$  for this example, the second and fourth order heat equations on  $S$ ,  $q = 1, 2$  in equation (13), are given by

$$u_t = -(-1)^q (a^q \partial_{x_1}^{2q} u + 2c^q \partial_{x_1}^q \partial_{x_2}^q u + b^q \partial_{x_2}^{2q} u).$$

### C. Numerical resolutions

Many schemes are proposed for performing nonlinear diffusion filtering in 2-dimensional space. See [47] for an extended review. For purpose of simplicity, we consider here numerical resolution schemes for fourth-order PDE with no tension ( $\alpha = 0$ ) in equation (11).

**Explicit scheme.** To approximate PDE-based sifting process numerically, we replace the derivatives by finite differences. Since continuous fourth-order PDE has the structure

$$u_t = - \sum_{i,j=1}^2 \partial_{x_i}^1 \left( g_i \partial_{x_i}^1 \partial_{x_j}^2 u \right), \quad (15)$$

its simplest discretization, between iterations  $k$  and  $k + 1$ , is given by the difference scheme

$$\frac{U^{k+1} - U^k}{\Delta t} = - \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} U^k,$$

so,

$$U^{k+1} = \left( I - \Delta t \sum_{i,j=1}^2 L_{ij} \right) U^k, \quad (16)$$

where  $U$  is the vector formed with the values at each pixel of  $u(\mathbf{x})$ , and where  $L_{ij}$  is a difference approximation matrix to the operator  $\partial_{x_i}^1 (g_i \partial_{x_i}^1 \partial_{x_j}^2)$ . Unfortunately, this explicit scheme require very small time steps  $\Delta t$  in order to be stable. A possible amelioration consists on the use of a Du Fort and Frankel (FFD) scheme which is unconditionally stable but is no longer consistent for large time steps  $\Delta t$ .

**Additive Operator Splitting scheme.** We can use an Additive Operator Splitting (AOS) scheme of the form

$$U^{k+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^2 (I + 2\Delta t L_{nn})^{-1} \left( I - \Delta t \sum_{i=1}^2 \sum_{j \neq i} L_{ij} \right) U^k. \quad (17)$$

This method presents better stability properties, but requires matrix inversions which come down to solving diagonally dominant pentadiagonal systems (for term with  $L_{nn}$ ) of linear equations and can be performed with a modified Thomas algorithm [56]. We can note that in equation (17) matrices  $L_{nn}$  not depend on iteration  $k$ , so matrix inversions are then performed only one time at the beginning ( $k = 0$ ) of the iterative scheme.

**Alternate Direction Implicit scheme.** In order to reduce complexity, a simplification can be performed on equation (15) which can be rewritten as

$$u_t = - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j}^2 u - \sum_{i,j=1}^2 b_{ii} \partial_{x_i}^1 \partial_{x_j}^2 u,$$

where  $a_{ij} = \frac{1}{2}(g_i + g_j)$  and  $b_{ii} = \partial_{x_i}^1 g_i$ . As  $g_i$  is piecewise constant, terms in second summation can be neglected, approximated continuous formulation is then given by

$$u_t \approx - \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j}^2 u. \quad (18)$$

We therefore propose the use of Alternating Direction Implicit (ADI) type schemes (accurate to second order in time) which is extensively used for second-order diffusion equation. Fourth-order PDEs are more difficult to implement with ADI, as equation (18) includes a cross-term. Witelski and Bowen [57] suggest an ADI scheme in which the mixed derivative term is computed explicitly. Then equation (18) is numerically resolved as

$$U^{k+1} = \left( \prod_{n=1}^2 (I - \Delta t A_{nn}) \right)^{-1} \left( I + \Delta t \sum_{i=1}^2 \sum_{j \neq i} A_{ij} \right) U^k, \quad (19)$$

where  $A_{ij}$  is a central difference approximation matrix to the operator  $a_{ij} \partial_{x_i}^2 \partial_{x_j}^2$ .

## VI. RESULTS

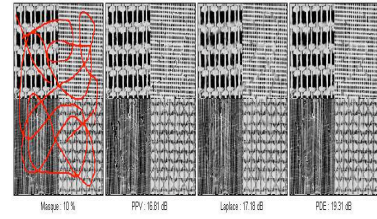
In this section, we firstly prove in subsection VI-A, the efficiency of the PDE interpolator by comparison with some existing methods. Secondly, in subsection VI-B, some experiments illustrate obtained results on various applications of the PDE-based BEMD.

### A. PDE interpolator performance

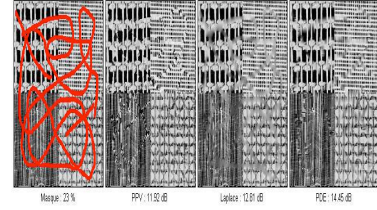
The notion of (digital) image inpainting was first introduced in the paper of Bertalmio-Sapiro-Caselles-Ballester [63]. Smart digital inpainting models, techniques, and algorithms have broad applications in image interpolation, photo restoration, zooming and super-resolution, primal-sketch based perceptual image compression and coding, and the error concealment of (wireless) image transmission, etc.. Another approach uses ideas from classical fluid dynamics to propagate isophote lines continuously from the exterior into the region to be inpainted [68]. This method is directly based on the Navier-Stokes equations which was well-developed with theoretical and numerical results. Inspired by the work of Bertalmio et al., Chan and al. have proposed a general mathematical models for local inpainting of nontexture images. In the following, we made some experiments, only to show how the PDE interpolator works. Figure 5 shows an example of image inpainting and noise removal results on a degraded LENA image. Figures 5(c) and (f) show the original image, and Figures 5(d) and (g) are the occluded (degraded) image. The PDE-based Inpainting method consists to calculate the mean-envelope of degraded image. Here the diffusivity functions  $g^\pm(x)$  are set to 1 on occlusion domain (triangular areas on Figures 5(d) and (g)) where lost data must be restored. Figures 5(e) and (h) illustrates the resulting restored image. Figure 5(a) illustrate Lena picture with 17,76 dB noise level and its restored version by PDE-interpolator with obtained Signal-to-Noise Ratio (SNR) equal to 21,88 dB. On Figure 5(b), Lena picture with 13,83 dB noise level is restored by PDE-interpolator with final SNR equal to 21,88 dB.

This is not an easy task, if we know just little informations on an original image as some part of the features such as edges, and that we want to restore this incomplet image. In the example in Figure 1, degraded masks of 10%, 23% and 35% of the image are applied on. To restore these degraded images, we perform an inpainting operation through three different interpolation methods: Laplace, k - Neighbors (kNN) (with  $k = 4$  or 6) and our PDE-interpolator. By comparing the Signal-to-Noise Ratio (SNR), the obtained results show that the PDE-interpolator works better than the others two methods. To complete the demonstration with the SNR, a zoom on the results in figure1(d) is performed for more visual appreciation.

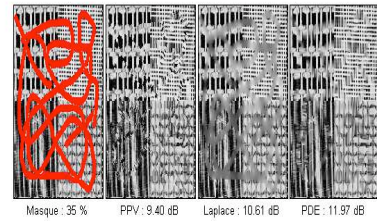
In Figure 2, only 50%, 23%, 35% and 5% of the image is alternately available. From these informations, we perform an restoration of the incomplet images by different methods: Laplace, k-Nearest neighbor and our PDE-interpolator. By comparing the Signal-to-Noise Ratio, the obtained results show that the PDE-interpolation works better than the others. In the case of 5% for example, PDE-interpolator is far better considering the SNR and the visual quality of the image result.



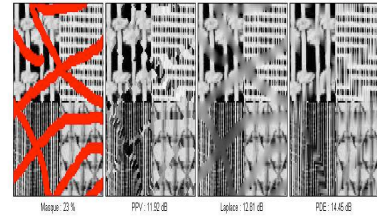
(a) Inpainting on Brodatz with 10% of pixels masked



(b) Inpainting on Brodatz with 23% of pixels masked



(c) Inpainting on Brodatz with 35% of pixels masked



(d) Zoom on Brodatz at 23%

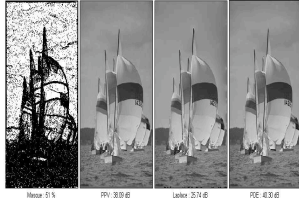
Fig. 1. Illustration of image inpainting using PDE-interpolator: Visual comparison of PDE-interpolator, kNN and Laplace methods.

### B. Some applications of PDE-based BEMD

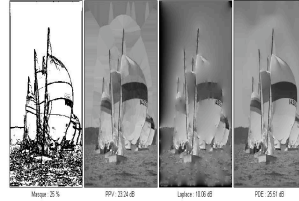
In these experiments, several synthetic and real images are used to test effectiveness of our approach. We recall that in PDE-based EMD, the same stopping criteria as in the classical BEMD algorithm [23] are used.

In this section we are interesting on various possible applications of BEMD, such as texture extraction, image denoising or image inpainting. Particularly, in image segmentation problems, texture extraction is a crucial step and is one of the most important techniques for image analysis and understanding. One of the crucial aspects of texture analysis is the extraction of textural features and properties. The use of filter operators has been applied successfully to a variety of computer vision problems. A set of linear or non-linear operators is generally applied to the

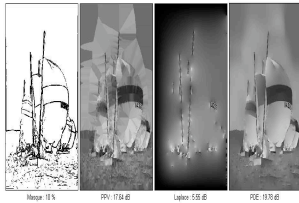




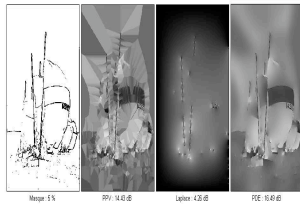
(a) Image restauration of Boat with 50% of the total information



(b) Image restauration of Boat with 25% of the total information%



(c) Image restauration of Boat with 35% of the total information



(d) Image restauration of Boat with 5% of the total information

Fig. 2. Illustration of image restauration using PPV, Laplace and PDE-interpolator: in case of 5%, even if their SNR are similar, the visual quality of PDE-interpolator is obvious with respect to Laplace result which is work more than kNN method.

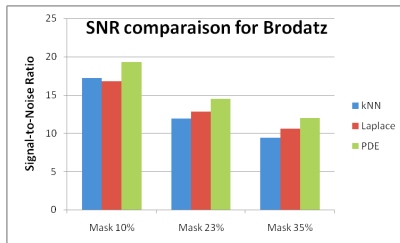


Fig. 3. Comparison of Signal-to-Noise Ratio in brodatz image test. A qualitative comparison between PDE-interpolator, kNN and Laplace Methods. PDE-interpolator yield better results in image restoration.

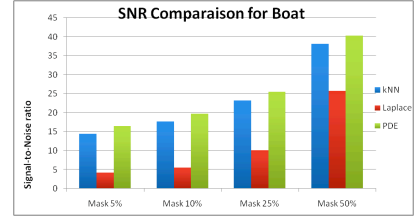
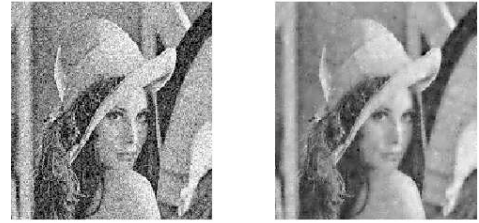


Fig. 4. Comparison of Signal-to-Noise Ratio in bottle image test. A qualitative comparison between PDE-interpolator, kNN and Laplace Methods. PDE-interpolator yield better results in image reconstruction.



(a)



(b)



(c)



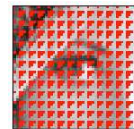
(d)



(e)



(f)



(g)



(h)

Fig. 5. Image inpainting and Restoration examples on 'LENA' image. (a) Noised Lena with 17,76 dB and the restored version with PDE-interpolator (21,88 dB). (b) Noised Lena with 13,83 dB and the restored version with PDE-interpolator (19,75 dB). (c) Original image. (d) Degraded image. (e) Inpainting result image. (f)-(g) Zoom on for images (c)-(e).

input image, that creates a multimodal data space. There is a lot of related work on the optimal filter selection for texture segmentation. Most of approaches adopt predefined filter bank that is composed of isotropic or anisotropic filters such as the Gaussian operator, the Laplacian-of-Gaussian operator [58], or the 2D Gabor operators with different scale and orientation [59]–[61]. An alternative selection is the wavelet transform, which provides a unifying framework for the analysis and characterization of an image into different scales (see for example [62]).

**First example (oriented decomposition).** To compare the effect of the selective directional diffusion, we implement equation (11) by splitting directions,  $(X, Y) = (x_1, x_2)$ . Figure 6 illustrates the decomposition of a synthetic image composed of FM components, figure 6(a). Figures 6(b) – (c) show respectively first IMF and residual obtained in  $X$ -direction. Figures 6(d) – (e) show respectively first IMF and residual obtained in  $Y$ -direction. Figures 6(f) – (g) show respectively first IMF and residual obtained in both  $X$ - and  $Y$ -direction. Finally, figures 6(h) – (i) show respectively first IMF and residual obtained in  $Y$ -direction after diffusion in  $X$ -direction, resulting on extraction of IMF in diagonal direction.

**Second example (adaptive decomposition).** Figure 8, is a comparison between BEMD and Laplacian pyramid [58] for high frequencies components extraction. The original image, figure 8(a), is decomposed in a high frequencies component image, figure 8(b), and a residual image, figure 8(d) with BEMD approach. The decomposition obtained with Laplacian pyramid no permits catching of all strips of zebra, see figure 8(c) for high frequencies component (Laplacian) image and figure 8(e) for residual (Gaussian) image.

**Third example (extracting features, structure and texture).** Figure 9 show how BEMD can extract multi-oriented texture without introducing smoothing effect. Figure 9(b) and figure 9(c) show respectively the first IMF (texture image) and the residual (structure image) of BARBARA original image, figure 9(a).

**Fourth example (image denoising).** Figure 7 shows how BEMD can acts as a denoising filter. An initial image, figure 7(a), is corrupted with Gaussian noise, Figure 7(b). The fifth IMF corresponds to the denoised image, figure 7(c).

**Fifth example (texture analysis).** Figure 10 shows PDE-BEMD for a direct texture analysis. An initial image, figure 10(a), is decomposed into IMFs, Figure 10(b – c – d) and an residual component in 10(e). For color images decomposition, the PDE-based BEMD method is applied for each color plane. In the principle, it can be compared to multidimensional EMD implementation as presented in [69], where a set of common frequency scales can be determined by simultaneously decomposing sources using the bivariate EMD.

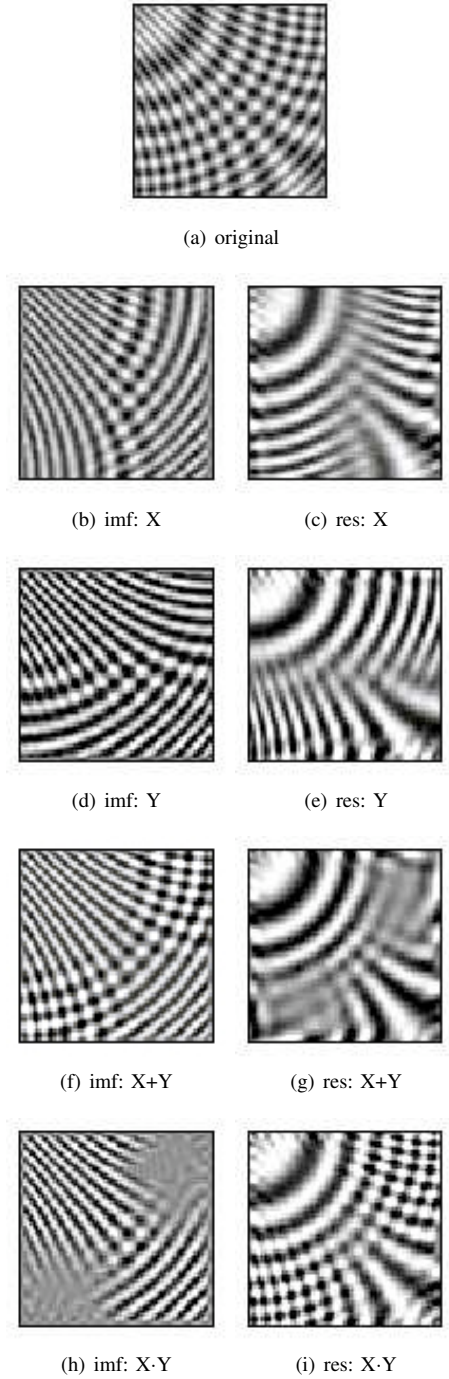


Fig. 6. Illustration of the directional and local adaptive frequency decomposition for PDE-based BEMD. (a) Original multicomponent FM image. (b)-(c) First IMF and residual for decomposition in column direction (X). (d)-(e) First IMF and residual for decomposition in row direction (Y). (f)-(g) First IMF and residual for decomposition in both directions (X+Y). (h)-(i) First IMF and residual for decomposition in row direction following by decomposition in column direction (X·Y).

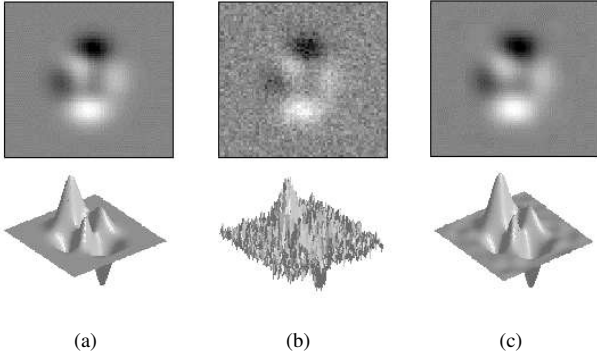


Fig. 7. Illustration of image denoising using PDE-based EMD. (a) Free-noise image, 2D (up) and surface (down) representations. (b) Same as in (a) with additive Gaussian noise. (c) The denoised image is given by the fifth IMF.

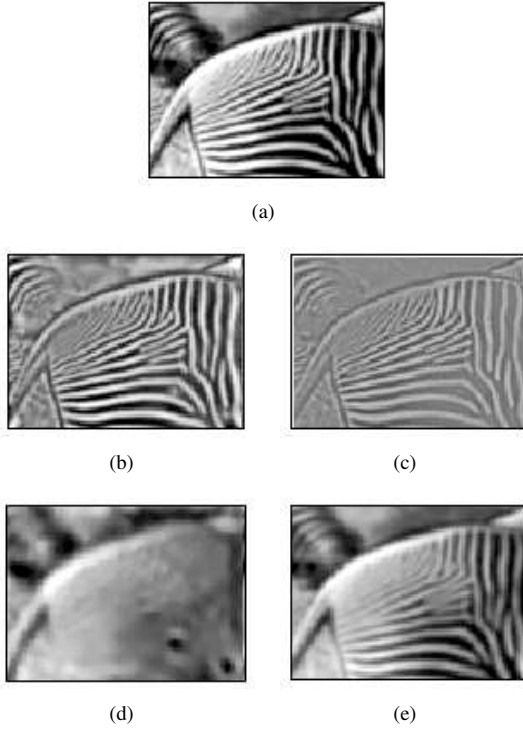


Fig. 8. Comparison between PDE-based BEMD and Laplacian Pyramid approach. (a) Original image. (b) and (d) first IMF and residual of BEMD. (c) and (e) First level of Laplacian and Gaussian pyramids. Whereas BEMD is able to extract a broad band FM component, Laplacian decomposition failed. All strips of zebra are identified in first IMF (b), but only high frequency strips are catching in (c).

## VII. CONCLUSION

In this paper, we have proposed an 2D PDE-based version to the purely algorithmic implemented sifting process used in the original Huang's EMD method. The approach to solve the selective signal smoothing is based on a fourth-order nonlinear diffusion equation. In the spirit of the original sifting process, this nonlinear filtering algorithm is equivalent to an iterated sequence of regularization and reconstruction processes. Experimental results show that our approach can be used to achieve signal decomposition with a valuable

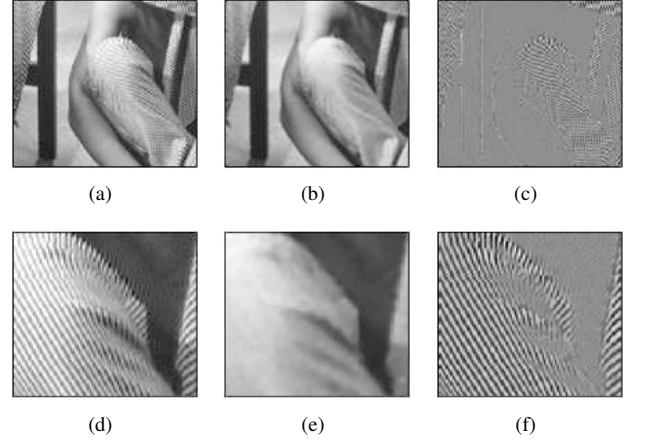


Fig. 9. Illustration of BEMD-based image filtering on 'BARBARA' image. (a) Original image. (b) and (c) approximation (residual) image and details (first IMF) image. (d)-(f) Closed-up on images (a)-(c).

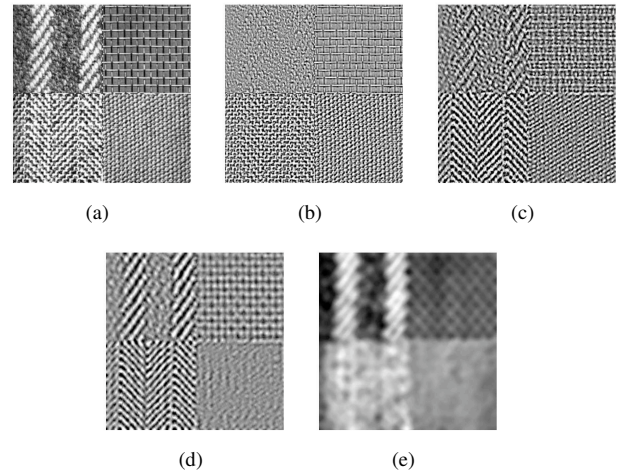


Fig. 10. Illustration of PDE-Based BEMD texture on 'Brodatz' image. (a) Original image. (b - c and d) details with successive IMFs from PDE-BEMD. (e) the residu of the EMD.

performance. Especially in the case of images, the method is very efficient and time consuming competitive compared to existing 2D version of EMD in the literature like RBF-tools that we used in previous works for BEMD implementation. The main contribution of this paper was the use of 2D PDE-interpolator that works like a selective image smoothing method. In accordance with the analytical approach for sifting process depicted in previous works, this method can be used for extracting transient signal and for intermittencies removal problems. Finally the 2D version of this approach could boost applications of EMD in image analysis and compression which is the subject of ongoing work.

## REFERENCES

- [1] O. Niang, E. Deléclle and J. Lemoine, "An Spectral approach for sifting process in Empirical Mode Decomposition," IEEE Transaction on Signal Processing, vol.58, num 11, pp. 5612-5623, 2010.
- [2] O. Niang, "Empirical Mode Decomposition: Contribution à la modélisation mathématique et application en traitement du signal et l'image," PhD thesis, Univ Paris 12, Créteil, France, Septembre 2007.



- [3] E. Deléclle, J. Lemoine, and O. Niang, "Empirical Mode Decomposition: An Analytical Approach for Sifting Process," IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, num 11, pp. 764-767, 2005.
- [4] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, M. L. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N. C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu, "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis," Proc. Roy. Soc. London A, vol. 545, pp. 903-995, 1998.
- [5] K. T. Coughlin and K. K. Tung, "The 11-year solar cycle in the stratosphere extracted by the empirical mode decomposition method," Adv. Space Res., vol. 34, pp. 323-329, 2004.
- [6] R. Fournier, "Analyse stochastique modale du signal stabilométrique. Application à l'étude de l'équilibre chez l'Homme." Créteil (France): Thèse de doctorat, Univ. Paris XII Val-de-Marne, 2002.
- [7] E. P. Souza Neto, M.-A. Custaud, C. J. Cejka, P. Abry, J. Frutoso, C. Gharib, and P. Flandrin, "Assessment of cardiovascular autonomic control by the Empirical Mode Decomposition," 4th Int. Workshop on Biosignal Interpretation, Como (Italy), 2002.
- [8] Z. Wu, E. K. Schneider, Z. Z. Hu, and L. Cao, "The impact of global warming on ENSO variability in climate records," COLA Technical Report CTR 110, October 2001.
- [9] P. Flandrin, <http://www.ens-lyon.fr/~flandrin/software.html>.
- [10] Norden Huang and al., [http://rcada.ncu.edu.tw/research1/clip\\_ex.htm](http://rcada.ncu.edu.tw/research1/clip_ex.htm).
- [11] E. Deléclle, <http://perso.wanadoo.fr/e.deleclle/codes.html>.
- [12] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Gonçalves, "On Empirical Mode Decomposition and its Algorithms," presented at IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing NSIP-03, Grado (Italy), 2003.
- [13] P. Flandrin, G. Rilling, and P. Gonçalves, "Empirical mode decomposition as a filter bank," IEEE Signal Processing Letters, vol. 11, pp. 112-114, 2004.
- [14] P. Flandrin and P. Gonçalves, "Empirical Mode Decompositions as Data-Driven Wavelet-Like Expansions," Int. Journal of Wavelets, Multires. and Info. Proc., to appear, 2004.
- [15] P. Flandrin, P. Gonçalves, and G. Rilling, "EMD Equivalent Filter Banks, from Interpretation to Applications," in Hilbert-Huang Transform: Introduction and Applications, S. S. P. Shen, Ed.: World Scientific, 2004.
- [16] P. Flandrin, "Some aspects of Huang's Empirical Mode Decomposition, from interpretation to applications," Int. Conf. on Computational Harmonic Analysis CHA-04 (invited talk), Nashville (TN), 2004.
- [17] Z. Wu and N. E. Huang, Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method, Adv. Adapt. Data Anal. 1 (2009) 141.
- [18] Wu ZH, Huang NE, Chen XY (2009) The Multi-Dimensional Ensemble Empirical Mode Decomposition Method. Adv Adaptive Data Anal 1: 339372.
- [19] Toshihisa Tanaka and Danilo P. Mandic, "Complex Empirical Mode Decomposition", IEEE Signal Processing Letters, VOL. 14, NO. 2, pp.101-104, February 2007.
- [20] M. U. B. Altaf, T. Gautama, T. Tanaka, and D. P. Mandic, "Rotation invariant complex empirical mode decomposition," in Proc. Int.Conf. Acoustics, Speech, Signal Processing (ICASSP), 2007, vol. 3, pp.10091012.
- [21] G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves, and J. Lilly, "Bivariate empirical mode decomposition," IEEE Signal Processing Letters, vol. 14, no. 12, 2007.
- [22] J. Fleureau, J.C. Nunes, A. Kachenoura, L. Albera and L. Senhadji, "Turning Tangent Empirical Mode Decomposition: A framework for mono- and Multivariate Signals", IEEE Transactions on signal Processing, vol. 59, n3, march 2011.
- [23] J.-C. Nunes, Y. Bouaoune, E. Deléclle, O. Niang, and Ph. Bunel, "Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition," Journal of Image and Vision Computing, vol. 21, pp. 1019-1026, 2003.
- [24] J.-C. Nunes, S. Guyot, and E. Deléclle, "Texture analysis based on the bidimensional empirical mode decomposition," Journal of Machine Vision and Applications, 2005.
- [25] C. Damerval, S. Meignen, and V. Perrier, "A fast algorithm for bidimensional emd," IEEE Signal Processing Letters, vol. 12, no. 10, pp. 701-704, October 2005.
- [26] Y. Xu, B. Liu, J. Liu, and S. Riemenschneider, "Two-dimensional empirical mode decomposition by finite elements," The Royal Society A, pp. 1-17, 2006.
- [27] S. M. A. Bhuiyan, R. R. Adhami, and J. F. Khan, "A novel approach of fast and adaptive bidimensional empirical mode decomposition," in IEEE ICASSP, 2008, pp. 1313-1316.
- [28] Sharif M. A. Bhuiyan, Reza R. Adhami, and Jesmin F. Khan, "Fast and Adaptive Bidimensional Empirical Mode Decomposition Using Order-Statistics Filter Based Envelope Estimation," in EURASIP Journal on Advances in Signal Processing, article ID 728356, 2008.
- [29] N. Rehman and D. P. Mandic, "Multivariate empirical mode decomposition," in Proc. R. Soc. A (2010) 466, 12911302.
- [30] G. Jager, R. Koch, A. Kunoth, R. Pabel, Fast Empirical Mode Decompositions of Multivariate Data Based on Adaptive Spline-Wavelets and a Generalization of the Hilbert-Huang-Transform (HHT) to Arbitrary Space Dimensions, Advances in Adaptive Data Analysis (AADA) 2(3), 2010, 337-358.
- [31] Norden R Huang and al. <http://rcada.ncu.edu.tw/research1.htm>
- [32] Gabriel Rilling and Patrick Flandrin, "On the influence of sampling on the empirical mode decomposition", IEEE, ICASSP, 2006.
- [33] Zhengguang Xu, Benxiong Huang, and Fan Zhang, "Improvement of empirical mode decomposition under low sampling rate," Signal processing, Vol.89, n11, pp. 2296-2303, 2009.
- [34] Zhengguang Xu, Benxiong Huang, and Kewei Li, "An alternative envelope approach for empirical mode decomposition," Digital Signal Process, elsevier, Vol.20, pp. 77-84, 2010.
- [35] Ingrid Daubechies, Jianfeng Lu and Hau-Tieng Wu, "Synchrosqueezed Wavelet Transforms: an Empirical Mode Decomposition-like Tool". Preprint submitted to Applied and Computational Harmonic Analysis July 25, 2010.
- [36] V. Vatchev, "Analysis of Empirical Mode Decomposition Method," presented at USC, 2002.
- [37] Oumar Niang, Mouhamed Ould Guerra, Abdoulaye Thioune, Eric Deléclle, Mary Teuw Niane and Jacques Lemoine, "A propos de l'Orthogonalité dans la Décomposition Modale Empirique". Conference GretSI 2011, Bordeaux, Septembre 2011.
- [38] J. D. Murray, *Mathematical Biology*, vol. 19. Berlin Heidelberg New-York: Springer-Verlag, 1993.
- [39] F. Catté, P. L. Lions, J. M. Morel, T. Coll, "Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion," SIAM J. Numer. Anal. vol. 129, pp. 182-193, 1992.
- [40] P. Perona, J. Malik, "Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion", IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 12(7), pp. 629-639, 1990.
- [41] Y. Meyer, "Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations" Univ. Lecture Ser. 22, AMS, Providence, RI, 2002.
- [42] S. Osher, A. Sole and L. Vese, "Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^1$  norm Multiscale Modeling and Simulation". A SIAM Interdisciplinary Journal, 1(3), 2003, pp. 349 - 370.
- [43] M. Lysaker, A. Lundervold, and X.-C. Tai, "Noise Removal Using Fourth-Order Partial Differential Equations with Applications to Medical Magnetic Resonance Images in Space and Time", IEEE Trans. On Image Processing, Vol. 12, No. 12, December 2003.
- [44] J. Weickert, B. M. ter Haar Romeny, and M. Viergever, "Efficient and Reliable Schemes for Nonlinear Diffusion Filtering," IEEE Trans. On Image Processing, vol. 7, pp. 398, 1998.
- [45] J. Weickert, "A review of nonlinear diffusion filtering," in Scale-Space Theory for Computer Vision, vol. 1252, Lecture Notes in Computer Science, B. H. Romeny, Ed. New York: Springer, 1997, pp. 3-28.
- [46] D. W. Peaceman and H. H. Rachford, "The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations," Journal Soc. Ind. Appl. Math., vol. 3, pp. 28, 1955.
- [47] D. Barash and R. Kimmel, "An Accurate Operator Splitting Scheme for Nonlinear Diffusion Filter," HP Company 2000.
- [48] A. Chun-Chieh Shih, H.-Y. M. Liao, and C.-S. Lu, "A New Iterated Two-Band Diffusion Equation: Theory and Its Application," IEEE Trans. On Image Processing, vol. 12, 2003.
- [49] A. Chambolle and P.-L. Lions, "Image recovery via total variation minimization and related problems," Numer. Math., vol. 76, pp. 167-188, 1997.
- [50] T. Chan, A. Marquina, and P. Mulet, "High order total variation-based image restoration," SIAM J. Sci. Comp., vol. 22, pp. 503-516, 2000.
- [51] M. Lysaker, S. Osher, and X.-C. Tai, "Noise removal using smoothed normals and surface fitting," UCLA CAM preprint 03-03, 2003.
- [52] J. Tumblin and G. Turk, "LCIS: A boundary hierarchy for detail-preserving contrast reduction," SIGGRAPH 1999 annual conference on Computer Graphics, Los Angeles, CA USA, 1999.
- [53] G. W. Wei, "Generalized Perona-Malik equation for image processing," IEEE Signal Processing Letters, vol. 69, pp. 165-167, 1999.
- [54] Y.-L. You and M. Kaveh, "Fourth order partial differential equations for noise removal," IEEE Trans. On Image Process., vol. 9, pp. 1723-1730, 2000.
- [55] J. Tumblin, *private communication*, 2003.
- [56] G. Engeln-Muelliges and F. Uhlig, in Numerical Algorithms with C, Chapter 4., Springer-Verlag Berlin, 1996.

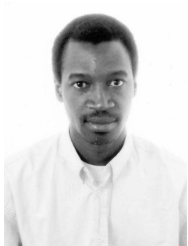
- [57] T.P. Witelski and M. Bowen, "ADI schemes for higher-order nonlinear diffusion equations," *Appl. Numer. Math.*, 45(2-3), pp. 331-351, 2003.
- [58] P. J. Burt, E. H. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code," *IEEE Trans. on Communications*, pp. 532-540, April 1983.
- [59] D. Gabor, *Theory of communications*. IEE proceedings, 93, 1946.
- [60] A. Bovik, M. Clark, and W. Geister, "Multichannel texture analysis using localized spatial filters," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 12, pp. 55-73, 1990.
- [61] D. Dunn and W. Higgins, "Optimal Gabor filters for texture segmentation," *IEEE transactions on Image Processing*, vol. 4, pp. 947-964, 1995.
- [62] M. Unser, "Texture classification and segmentation using wavelet frames," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 4, pp. 1549-1560, 1995.
- [63] M. Bertalmio, G. Sapiro, V. Caselles, and C. Ballester, "Image inpainting," *Computer Graphics, SIGGRAPH 2000*, July, 2000.
- [64] P. Mrázek, J. Weickert, G. Steidl, and M. Welk, "On Iterations and Scales of Nonlinear Filters," *Proc. of the Computer Vision Winter Workshop*, ed.:O. Drbohlav, Valtice, Czech Republic, pp. 61-66, Feb. 3-6, 2003.
- [65] M. Unser, A. Aldroubi, and M. Eden, "The  $L_2$  Polynomial Spline Pyramid," *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 15(4), pp. 364-379, April 1993.
- [66] T. F. Chan and J. Shen, "Mathematical models of local non-texture inpaintings", *SIAM J. Appl. Math.*, 62(3):10191043, 2002.
- [67] L. Rudin, S. Osher, and E. Fatemi, "Nonlinear total variation based noise removal algorithms" *Phys. D*, 60 (1992), pp. 259268.
- [68] M. Bertalmio, A. L. Bertozzi, and G. Sapiro, "Navier-Stokes, Fluid Dynamics, and Image and Video Inpainting", *Proceedings of the International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, IEEE, Dec. 2001, Kauai, HI, volume I, pp. I-355-I362.
- [69] Looney, D. and Mandic, D. P. "Multiscale image fusion using complex extensions of EMD". *IEEE Trans. Signal Process*, 2009. 57, 16261630.



**Mouhamed Cheikh El Gueirea** He received the master thesis at UFR Sciences Appliquées et de Technologie de l'Université Gaston Berger (UGB) de Saint-Louis, and is member of Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI) UGB Sénégal, in 2007. He prepare actually the Phd degree in Numerical Analysis at the same university.



**Éric Deléchelle** received the Ph.D. degree in biomedical engineering from the Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, France, in 1997. He is with the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI-EA 3956), Université Paris 12 Val-de-Marne, Créteil. Since 1999, he has been Maitre de Conférences at the Institut Universitaire de Technologie, Créteil, with research interests focused on stochastic signal analysis, biomedical signal, and medical image processing.



time frequency analysis,

**Oumar Niang** received the Ph.D. degree in computer sciences - actual biomedical engineering - from the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI-E.A. 3956), Université Paris Est Créteil Val-de-Marne - ex Paris 12 Val-de-Marne - , Créteil, France, in 2007. He is a Research Professor at the Ecole Polytechnique de Thies Sénégal. He is member of Laboratoire d'Analyse Numérique et d'Informatique (LANI) UGB Sénégal with research interests focused on mathematical modeling in signal processing, images processing and complex systems, biomedical signal and medical image analysis.



**Abdoulaye Thioune** received the master thesis in Transmission de Données et Sécurité de l'Information at Laboratoire d'Algèbre, de Cryptologie, de Géométrie Algébrique et Applications de la faculté des Sciences et Technique, Université Cheikh Anta Diop de Dakar Sénégal, in 2009. He prepare actually the Phd degree in biomedical engineering at the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI-E.A. 3956), Université Paris 12 Val-de-Marne, Créteil, France.



**Jacques Lemoine** received the Ph.D. degree in biomedical engineering from the Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, France, in 1981. He is a Distinguished Professor in the Laboratoire Images, Signaux et Systèmes Intelligents (LISSI-EA 3956), UFR des Sciences et Technologie, Université Paris Est Créteil Val-de-Marne, France. His research interests are focused on stochastic signal analysis, biomedical signal, and medical image processing.

# Bibliographie

- [AGTM07] M Umair Bin Altaf, Temujin Gautama, Toshihisa Tanaka, and Danilo P Mandic. Rotation invariant complex empirical mode decomposition. *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 1009–1012, 2007.
- [AK02] Gilles Aubert and Pierre Kornprobst. Mathematical problems in images processing, partial differential equations and the calculus of variations. *Applied Mathematical Sciences*, 147, 2002.
- [All77] J Allen. Short-term spectral analysis, and modification by discrete fourier transform. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 25(3) :235–238, 1977.
- [Boa03] B. Boashash. Time frequency signal analysis and processing. *Elsevier*, 2003.
- [BS08] F. Van Belzen and S. Weiland. Reconstruction and approximation of multi-dimensional signals described by proper orthogonal decompositions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56 :576587, 2008.
- [BSH<sup>+</sup>07] Ning Bi, Qiyu Sun, Daren Huang, Zhihua Yang, and Jiwu Huang. Robust image watermarking based on multiband wavelets and empirical mode decomposition. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 16(8) :1956–1966, 2007.
- [CDS98] S. S. Chen, D. L. Donoho, and M. A. Saunders. Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1) :3361, 1998.
- [CHRX06] Q Chen, N Huang, S Riemenschneider, and Y Xu. A b-spline approach for empirical mode decompositions. *Advances in Computational Mathematics*, 24(1) :171–195, 2006.

- [CLW69] James W Cooley, Peter AW Lewis, and Peter D Welch. The fast fourier transform and its applications. *Education, IEEE Transactions on*, 12(1) :27–34, 1969.
- [Coh92] A Cohen. *Ondelettes et Traitement Numérique du Signal*. Masson, 1992.
- [Coh95] Leon Cohen. Time-frequency signal analysis. *Ed. Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall*, 1995.
- [CT04] K T Coughlin and K K Tung. The 11-year solar cycle in the stratosphere extracted by the empirical mode decomposition method. *Adv. Space Res.*, 34(2) :323329, 2004.
- [DJ94] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Ideal spatial adaption via wavelet shrinkage. *Biometrika*, 81(3) :425–455, 1994.
- [DJ95] D.L. Donoho and I.M. Johnstone. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage. *Journal of the American Statistical Association*, 90(432) :1200–1224, 1995.
- [DJKP95] D.L. Donoho, I.M. Johnstone, G. Kerkycharian, and D. Picard. Wavelet shrinkage : Asymptopia ? *Journal of the Royal Statistical Society*, 57(2) :301–369, 1995.
- [DLN05] Eric Deléchelle, Jacques Lemoine, and Oumar Niang. Empirical mode decomposition : an analytical approach for sifting process. *IEEE Signal Processing Letters*, 12(11) :764767, 2005.
- [Don95] D.L. Donoho. Denoising by soft thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41 :613–627, 1995.
- [EMU96] G Engeln-Muellges and F Uhlig. *Numerical Algorithms with C*. Berlin, Germany : Springer-Verlag, 1996.
- [FF04] D Fadoua and D Florence. Tatouage d’images par techniques multidirectionnelles et multi résolution. *IRIS, Laboratoire Image Computing and Information Systems*, 2004.
- [FG04] P Flandrin and P Gonçalves. Empirical mode decompositions as a data-driven wavelet-like expansions. *Int. J. of Wavelets, Multires. and Info. Proc.*, 2(4) :477–496, 2004.

- [Fla98] Patrick Flandrin. *Time-frequency/time-scale analysis*, volume 10. Academic Press, 1998.
- [HAB10] S.D. El Hadji, R. Alexandre, and A. O. Boudraa. Analysis of intrinsic mode functions : A pde approach. *IEEE Signal Processing Letters*, 17(4) :398 – 401, 2010.
- [HBB92] Franz Hlawatsch and G Faye Boudreaux-Bartels. Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE Signal Processing Magazine*, 9(2) :21–67, 1992.
- [HS05] Norden Eh Huang and Samuel S Shen. *Hilbert-Huang transform and its applications*, volume 5. World Scientific, 2005.
- [HSLa98] N. E. Huang, Z. Shen, S. R. Long, and al. The empirical mode decomposition and the hubert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 454(1971) :903995, 1998.
- [KBT<sup>+</sup>10] Kais Khaldi, Abdel-Ouahab Boudraa, Bruno Torresani, Thierry Chonavel, and Monia Turki. Audio encoding using huang and hilbert transforms. pages 1–5, 2010.
- [KBTCV09] Kais Khaldi, Abdel-Ouahab Boudraa, Monia Turki, and Thierry Chona Vel. Codage audio perceptuel à bas débit par décomposition en modes empiriques. In *XXIIe colloque GRETSI (Traitement du signal et des images), Dijon (FRA), 8-11 septembre 2009*. GRETSI, Groupe d’Etudes du Traitement du Signal et des Images, 2009.
- [Kei03] Fritz Keinert. *Wavelets and multiwavelets*. CRC Press, 2003.
- [KH98] Deepa Kundur and Dimitrios Hatzinakos. Digital watermarking using multiresolution wavelet decomposition. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, volume 5, pages 2969–2972. IEEE, 1998.
- [Lin02] Anna Linderhed. 2d empirical mode decompositions in the spirit of image compression. In *AeroSense 2002*, pages 1–8. International Society for Optics and Photonics, 2002.



- [Lin05] Anna Linderhed. Compression by image empirical mode decomposition. In *Image Processing, 2005. ICIP 2005. IEEE International Conference on*, volume 1, pages I–553. IEEE, 2005.
- [Mal00] S Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Ecole polytechnique, 2000.
- [Mal08] Stephane Mallat. *A wavelet tour of signal processing : the sparse way*. Academic press, 2008.
- [Mur93] J. D. Murray. *Mathematical Biology*. Chapman & Hall, springer-verlag edition, 1993.
- [NDL10] Oumar Niang, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. An spectral approach for sifting process in empirical mode decomposition. *IEEE Transaction on Signal Processing*, 58(11) :5612–5623, 2010.
- [NGT<sup>+</sup>11] Oumar Niang, Mouhamed Ould Guerra, Abdoulaye Thioune, Eric Deléchelle, Teuw Niane Mary, and Jacques Lemoine. A propos de l’orthogonalité dans la décomposition modale empirique. In *XIII Colloque GRETSI*, page ID257, 2011.
- [Nia07] Oumar Niang. *Empirical mode decomposition : contribution à la modélisation mathématique et application en traitement du signal et l’image*. PhD thesis, University of Paris, Créteil, France, 2007.
- [Nol97] Peter Noll. Mpeg digital audio coding. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 14(5) :59–81, 1997.
- [NTD<sup>+</sup>13] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Eric Deléchelle, Mary Teuw Niane, Jacques Lemoine, et al. About a partial differential equation-based interpolator for signal envelope computing : Existence results and applications. *ISRN Signal Processing*, 2013, 2013.
- [NTDL12] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. Spectral intrinsic decomposition method for adaptive signal representation. *ISRN Signal Processing*, 9(3), 2012.
- [NTG<sup>+</sup>12a] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mohamed Cheikh El Gueirea, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. Partial differential equation-based approach for empirical mode decomposition : application on image analysis. *IEEE Transaction on Image Processing*, 21(9) :39914001, 2012.

- [NTG<sup>+</sup>12b] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Mouhamed Ould Guerra, Eric Deléchelle, and Jacques Lemoine. A new signal denoising method using iterative thresholding of the spectral intrinsic decomposition. *International Journal of Computer Science Issues*, 9(6) :370–377, 2012.
- [NTS<sup>+</sup>15] Oumar Niang, Abdoulaye Thioune, Samba Sidibé, Eric Delechelle, and Jacques Lemoine. Direct mode extraction without sifting in empirical mode decomposition algorithm. *Preprint*, july 2015.
- [Rad68] Charles Rader. Discrete fourier transforms when the number of data samples is prime. *Proceedings of the IEEE*, 56(6) :1107–1108, 1968.
- [RFG03] G Rilling, P Flandrin, and P Gonçalves. On empirical mode decomposition and its algorithms. *IEEE-EURASIP workshop on nonlinear signal and image processing*, NSIP-03 :Grado (I), 2003.
- [RFGL07] Gabriel Rilling, Patrick Flandrin, Paulo Gonçalves, and Jonathan M. Lilly. Bivariate empirical mode decomposition. *IEEE Signal Processing Letters*, 14 :936939, 2007.
- [Ril07] Gabriel Rilling. *Décompositions Modales Empiriques. Contributions à la théorie, l’algorithme et l’analyse de performances*. PhD thesis, ENS Lyon, 2007.
- [RM10] N. Rehman and D. P. Mandic. Multivariate empirical mode decomposition. *Proceedings of the Royal Society A*, 466(2117) :1291–1302, 2010.
- [RT05] G Rodriguez and D Theis. An algorithm for estimating the optimal regularization parameter by the l-curve. *Rendiconti di Matematica, Serie VII*, 25 :6984, 2005.
- [SCE01] Athanassios Skodras, Charilaos Christopoulos, and Touradj Ebrahimi. The jpeg 2000 still image compression standard. *Signal Processing Magazine, IEEE*, 18(5) :36–58, 2001.
- [SKTA09] Abdelouahed SABRI, Mohamed KAROUD, Hamid TAIRI, and Aabdelah AARAB. Image watermarking using the empirical mode decomposition, 2009.
- [Spe81] R Sperb. Maximumprinciple andtheir applications. *Mathematics in Science and Engineering Series, Academic Press, New York, NY, USA*, 157, 1981.

- [Ste81] Charles M. Stein. Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 9(6) :1135–1151, 1981.
- [SV06] R C Sharpley and V Vatchev. Analysis of the intrinsic mode functions. *Constructive Approximation*, 24(1) :17–47, 2006.
- [TDT08] Jalil Taghia, Mohammad Ali Doostari, and Jalal Taghia. An image watermarking method based on bidimensional empirical mode decomposition. In *Image and Signal Processing, 2008. CISP'08. Congress on*, volume 5, pages 674–678. IEEE, 2008.
- [TM04] D S Taubman and M W Marcellin. Jpeg2000, image compression, fundamentals, standards, practice. *Kluwer Academic Publishers*, 2004.
- [TM07] Toshihisa Tanaka and Danilo P Mandic. Complex empirical mode decomposition. *IEEE SIGNAL PROCESSING LETTERS*, 14(2), 2007.
- [TMK09] Jérémy TERRIEN, Catherine MARQUE, and Brynjar KARLSSON. Détection automatique du mixage de modes dans la décomposition modale empirique par la détection de non stationnarité : Application à la sélection des imf d'intérêts ou au débruitage. *XXIIe colloque GRETSI (traitement du signal et des images), Dijon (FRA)*, 2009.
- [TT99] J Tumblin and G Turk. Lcis : A boundary hierarchy for detailpreserving contrast reduction. *Proc. SIGGRAPH Annu. Conf Comput. Graph., Los Angeles, CA*, pages 1–8, 1999.
- [Tum03] J. Tumblin. private communication. 2003.
- [Wei99] G W Wei. Generalized perona-malik equation for image restoration. *IEEE Signal Process. Lett*, 6(9) :165–167, 1999.
- [WH09] Zhaohua Wu and Norden E. Huang. Ensemble empirical mode decomposition : A noise-assisted data analysis method. *Advances in Adaptive Data Analysis*, 1(1) :1–41, 2009.
- [WLL09] Pengfei Wei, Qiuhua Li, and Guanglin Li. Classifying motor imagery eeg by empirical mode decomposition based on spatial-time-frequency joint analysis approach. In *BioMedical Information Engineering, 2009. FBIE 2009. International Conference on Future*, pages 489–492. IEEE, 2009.

- [XBA97] Xiang-Gen Xia, Charles G Boncelet, and Gonzalo R Arce. A multiresolution watermark for digital images. In *Image Processing, 1997. Proceedings., International Conference on*, volume 1, pages 548–551. IEEE, 1997.